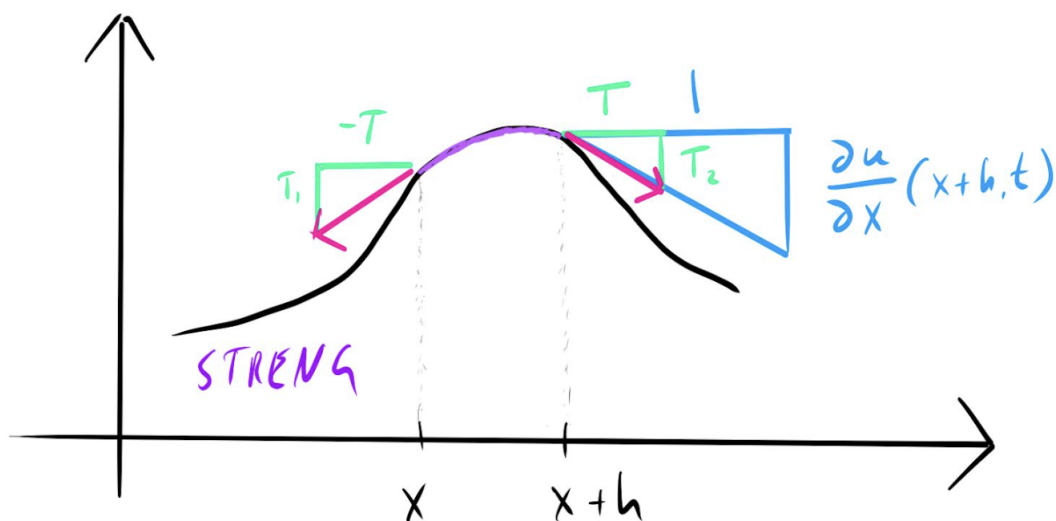


3 - 11 - HARMONISKE FUNKSJONER I - LF

- 1 Når vi utledet bølgelikningen for en streng, gjorde vi slik:



Vi antar at den horisontale strekkraften T (målt i newton) er lik overalt, slik at den lilla biten av strengen kun beveger seg opp og ned, ikke frem og tilbake. Massetettheten ρ er gitt i kilo per meter, så massen til den lilla biten er ρh . Netto vertikal kraft på biten er $T_1 + T_2$, så Newtons andre lov $F = ma$ gir

$$T_1 + T_2 = \rho h \ddot{u},$$

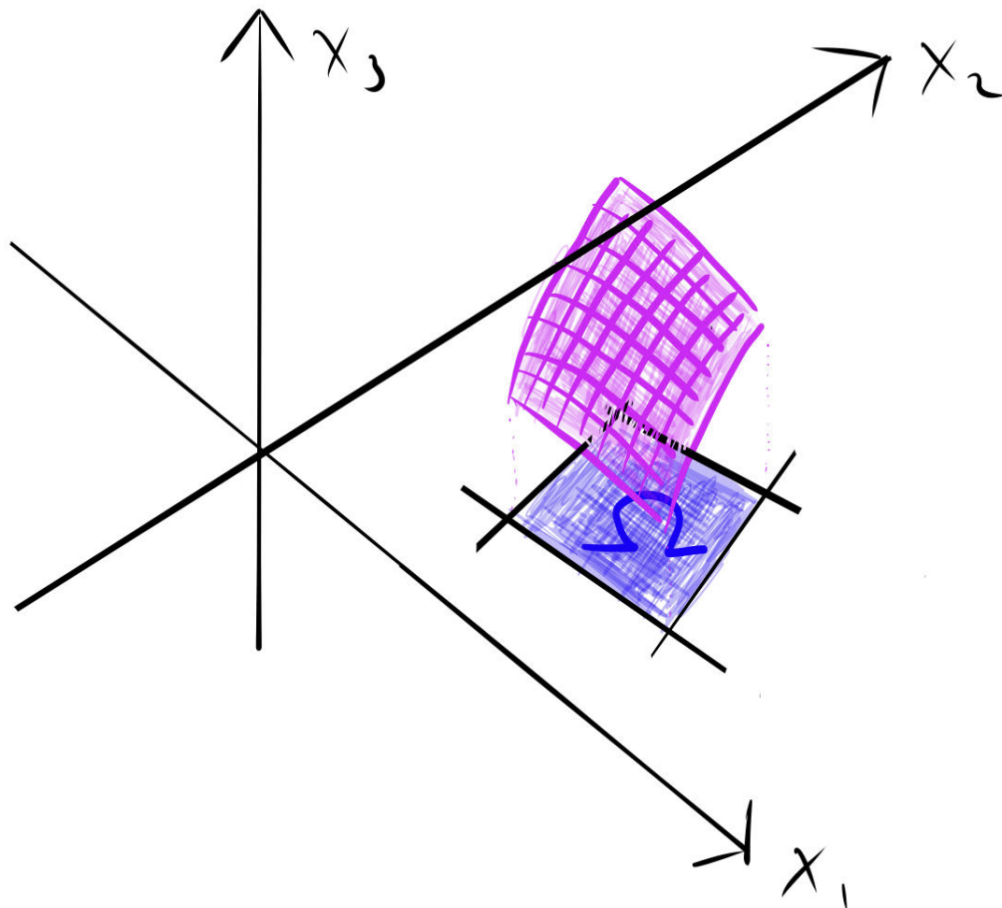
og siden dekomponeringen av strekkraften danner en trekant som er kongruent med trekanten som gir stigningstallet til u med hensyn på x , kan vi skrive

$$T_1 + T_2 = T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right).$$

Hvis vi nå deler Newtons andre lov på h og lar $h \rightarrow 0$, får vi bølgelikningen for en streng:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La oss se på en liten bit av et trommeskinn:



Strekraften på en streng er naturlig å måle i Newton, for strengens stramhet kan sammenlignes med stramheten du får ved å bruke den til å henge opp et lodd. (På gitarstrengpakken står strengestrekker oppgitt i kilo.) For et trommeskinn er det mest naturlig å oppgi strekket i newton per meter - da kan du integrere strekket over et linjestykke for å finne den totale kraften på linjestykket. Dette er som hydrostatisk trykk i vann - trykk er kraft per areal, og man integrerer trykket over en flate for å finne totalkraften på flaten. Hvis vi sier at Ω i figuren er et kvadrat med det ene hjørnet i x , sidekant h og massesenter i $(x_1 + h/2, x_2 + h/2)$, blir Newtons andre lov

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1 + h/2, x_2 + h/2) =$$

$$Th \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1 + h, x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2 + h, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2, t) \right)$$

der kreftene på høyre side er fremkommet ved å anta at det horisontalet strekket T er konstant

og så bruke det samme kongruenstriket som for strengen. Lar vi $h \rightarrow 0$, får vi bølgelikningen

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

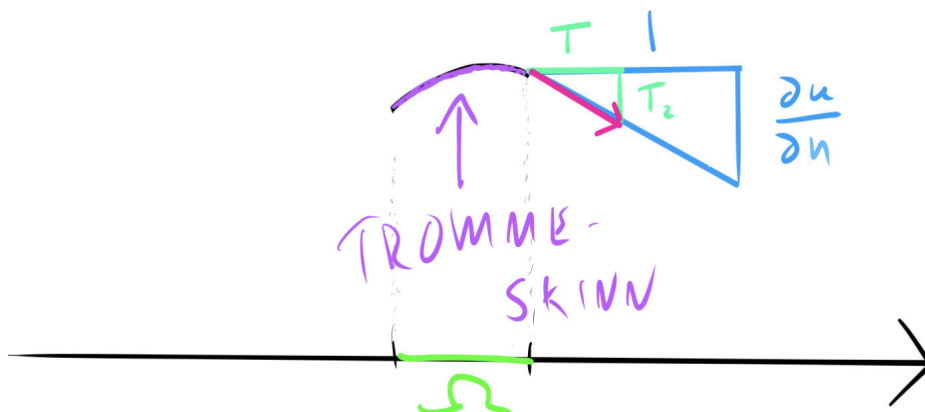
for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn. Vi kunne også summert opp kreftene langs randen av den lille biten og så brukt Greens teorem slik:

$$F = T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = T \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx \approx Th^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Dette var det noen som syntes var mer naturlig i forelesning. Uttrykket

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}$$

er en spesiell notasjon for den retningsderiverte til u langs utnormalvektoren til $\partial\Omega$, og det er kanskje ikke helt trivielt å se at netto kraft er linjeintegralet til denne. For å se det må du nesten tegne opp den samme kongruenstrekanen som for strengen, men sette den på kanten av den lille biten med trommeskinnet og normalt utover slik:



- 2 Vi har en plate som er dekket av Glava over og under slik varmeenergi kun strømmer horisontalt langs platen. La Ω være en liten bit av platen. Vi kan sette opp endring i indre energi slik:

$$\frac{d}{dt} \alpha \iint_{\Omega} u = \alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Konstanten α inneholder info om varmekapasiteten, platens tykkelse og alt det der. Endring i indre energi må være lik det som strømmer ut gjennom $\partial\Omega$, så vi må ha

$$\alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} q \cdot n ds$$

der q er varmefluksen. I mange materialer er denne proporsjonal med temperaturgradienten men motsatt rettet, slik at vi får

$$\alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} = k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Dette må gjelde for alle små biter av platen, så da må integrandene være like, og vi får

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Utleddningen står også her: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html

Husk at varmelikningen ikke bare er en modell for varmeflyt, men også for diffusjon, derfor kalles den gjerne diffusjonslikningen:

https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation

Utleddningen er identisk, man bare bytter ut temperatur med konsentrasjon, energikonservering med massekonservering, og Fouriers varmelov med Ficks diffusjonslov som sier nøyaktig det samme.

- 3 Her er det bare å bytte ut alt på høyre side i utledningen av bølgelikningen med det som kreves for at trommeskinnet skal være deformert men i ro. La oss anta at trommeskinnet utsettes for et statisk trykk $f(x)$ og så må strekkreftene i skinnet balansere de eksterne trykkreftene slik at trommeskinnet ikke flytter på seg. Vi bruker Greens teorem slik som i bølgelikningen og får strekkreftene

$$T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = T \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx$$

og trykkreftene er

$$\iint_{\Omega} f(x) dx.$$

Setter vi disse lik hverandre og antar at Ω er vilkårlig valgt, må integrandene være like. Dette kalles Poissons likning:

$$\frac{f}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

og er den inhomogene varianten av Laplaces likning. Se også utledning her:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html

- 4 Dersom ρ er oppgitt i kilo per kvadratmeter er

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} \rho = \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

den totale massen inne på området Ω , og dersom v er væskehastigheten i meter per sekund er

$$\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n ds$$

den totale utstrømningen fra Ω . Dersom masse ikke skal forsvinne, må disse to være like, og Greens teorem gir

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} dx$$

og dersom Ω er tilfeldig valgt, må integrandene være like og vi får kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} = 0$$

- 5 I oppgave 1 får vi en harmonisk funksjon om $\ddot{u} = 0$, og i oppgave 2 om $\dot{u} = 0$ og i oppgave 3 om $p = 0$. I oppgave 4 får vi laplaces likning dersom ρ er konstant og v er gradienten til et skalarfelt ϕ . Da tvinger kontinuitetslikningen gjennom at ϕ er en harmonisk funksjon.
- 6 Denne oppgaven passer konseptuelt inn her, men regneteknisk hører den mer hjemme i TMA4106, så det kommer ikke på eksamen. Jeg har løst den på side 137-138 her:
<https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf>
- 7 Vi må sjekke at dersom

$$x = Ry = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

og $v(y) = u(Ry)$ er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$$

så lenge R er rotasjonsmatrisen. La oss derivere i vei:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y_1} &= \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ &\quad - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y_1} &= \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} &= \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Hvis du nå legger sammen de rene andre ordens partiellderiverte og gjør alle kanselleringene, vil du se at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Et spesialtilfelle er at om u er harmonisk, er også v harmonisk.

- 7 Standardmetoden her er å finne ut hva integralene på høyre side evaluerer til. Dersom Ω er en sirkelskive sentert i $(a, b)^T$ med radius r , kan vi definere oss en funksjon ϕ og skrive

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) r \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

La oss derivere litt og bruke Greens teorem slik vi pleier:

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} r d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{\Omega} \Delta u \, dx = 0
 \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u$$

Greit, så ϕ endrer seg visst ikke med r . Hva er ϕ sin konstante verdi? Det går sikkert fint å la $r \rightarrow 0$, siden ϕ er konstant:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = u(a, b)$$

Det siste steget er kanskje ikke helt innlysende for alle, men middelverdisatsen kommer i en versjon for integraler, skroll deg litt nedover her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem

Konsekvensen er at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx = f(x),$$

og vår grenseverdioperasjon for ϕ er den samme, bare at vi har rullet sammen arket f er tegna på til en sylinder med radius r og så er u høyden til sylindren som funksjon av r og θ . Alt i alt har vi at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds.$$

Vi tar så det neste integralet i polarkoordinater og regner i vei:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(a + p \cos \theta, b + p \sin \theta) p d\theta dp \\
 &= \frac{u(a, b)}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi p \, dp = u(a, b)
 \end{aligned}$$

Dette kalles altså middelverdisatsen. En harmonisk funksjons funksjonsverdi er alltid lik gjennomsnittet av funksjonsverdiene både på alle omliggende sirkler og alle omliggende sirkelskiver:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u$$

8 Nå er jeg litt lei av å skrive alle disse partiellderiverte. La oss introdusere notasjonen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Dirichletproblemet består i å løse

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{på } \Omega \\ u &= g && \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dette problemet har entydig løsning, og om Ω er en sirkel sentrert i origo med radius a , finnes det faktisk en eksplisitt formel:

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(a \cos \phi, a \sin \phi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

Utleddningen er litt for grisete for TMA4111, men det er i samme gate som oppgave 6, bare mer jobb. Integralet på høyre side er stort sett umulig å beregne for hånd, men trivielt å beregne med numerisk integrasjon. Du finner kode her:

<https://folk.ntnu.no/mortano/harmonisk/>

og trommeskinnet ser omtrent sånn ut:

