3 - 1 - SKALARFELT

Nå skal vi begynne med noe som er noe mer hårete enn du er vant til, funksjoner av flere variable. Vi begynner med funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. Dette stoffet regnes av mange som det vanskeligste en ingeniørstudent skal gjennom, og Adams er ganske bra, så jeg tror jeg outsourcer et par temaer til ham. Adams er fryktlig glad i en gammel beregningssoftware som heter Maple. Denne er selvfølgelig avleggs, så ikke bry dere om det.

Denne uken leser vi kapittel 12 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

12.1: 11-28 og 37-48

12.3: 1-10, 13-22 og 25-29

12.4: 1-6, 8-13 og 17-19

VISUALISERINGSTEKNIKKER

OBS OBS OBS: Jeg kommer til å slutte å skrive $\mathbf{x}$. Fra nå av betyr x en vektor med komponenter x_k.

Du kan også bruke **orienteringsløpermetoden**. Et orienteringskart er en todimensjonal representasjon av et tredimensjonalt terreng, og med litt trening leser man dette omtrent like godt som om man så terrenget med sine egne øyne, eller faktisk bedre.

De brune linjene på kartet kalles **ekvidistanselinjer** eller **høydekoter**. Disse forteller noe om høyden over havet; dersom du følger en ekvidistanselinje, går du hverken opp eller ned. Den matematiske ekvivalenten kalles **nivåkurve**. Disse er gitt ved

$$c = f(x, y),$$

og forskjellige verdier for c gir forskjellige høyder over xy-planet.

$\boxed{2}$ Skisser nivåkurvene til

$$f(x, y) = x + 2y$$

Et polynom i to variable er gitt ved

$$p(x, y) = \sum_{k,m} a_{km} x^k y^m$$

Dersom $k + m \leq n$ og $k + m = n$ for minst en kombinasjon av k og m, sier vi at polynomet har orden n. For eksempel er et generelt førsteordens polynom gitt ved

$$p(x, y) = ax + by + c.$$

Grafen til denne blir alltid et plan i $\mathbb{R}^3$. Et generelt andreordens polynom er gitt ved

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Nivåkurvene til andreordens polynomer er de berømte kjeglesnittene.[1] Parabelen ($y = x^2$) og sirkelen ($x^2 + y^2 = 1$) kjenner du fra før. For en generasjon siden måtte sivingstudenter kunne alle disse

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section`

på fingrene (spør Svein Sunde), men idag fokuserer vi mer på andre ting. Kjeglesnittene kan være nyttige å kjenne til en gang i blant. En ellipse [2] med halvakser a og b tilfredsstiller likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

og en hyperbel[3] tilfredsstiller

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boxed{71}$ Finn og skisser nivåkurvene til flaten gitt ved $z = 4x^2 + 5y^2$.

$\boxed{73}$ Finn og skisser nivåkurvene til flaten gitt ved $z = 4x^2 + 8x + 5y^2 - 10y + 9$.

Hvis du synes det er skikkelig artig å klassifisere kjeglesnitt, finner du mange oppgaver i kap. 8.1 i Adams.

Normalfordelingen i flere variable er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\|2\pi\Sigma\|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)$$

der Σ kovariansmatrisen mellom komponentene i X. Denne matrisen er alltid symmetrisk, og man kan merke seg at innmaten i eksponensialfunksjonen er en kvadratisk form. Derfor er det mulig å skissere nivåkurvene til ormalfordelingen ved å vite litt om geometrien til kvadratiske former.

$\boxed{17}$ Nivåkurvene er visst alltid ellipser. Vis dette.

De store fysikere krangler mye om hvorvidt termodynamikk er vanskelig eller lett. Jeg vet ikke - jeg kan det ikke så godt, men klassisk termodynamikknotasjon er litt sloppy (sett fra en matematikers

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola

perspektiv), og dette skaper endel forvirring. Adams rydder greit opp i dette på et par steder, se side 710-712 og 728-729.

Du kan tenke på den ideelle gasslov enten som en empirisk lov som sakte men sikkert ble oppdaget på 1600-tallet og utover via Boyles lov, Charles lov, Avogadros lov og Guy-Lussacs lov, eller som en utledet regel i statistisk mekanikk.[4] Den sier at i en ideell gass følger trykket p, temperaturen T og volumet V formelen

$$\frac{pV}{T} = nR = Nk,$$

der

$k =$ $1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant[5]

$R =$ 8.31446261815324 J/mol K er den ideelle gasskonstant

N er antall gassmolekyler

n er antall mol gassmolekyler
(husk at $N = N_A n$, der $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23}$/mol er Avogadros konstant)

Hvis man liker bedre statistisk mekanikk, kan man skrive

$$\frac{3}{2}\frac{pV}{N} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$$

der v er forventningsverdien til den χ-fordelte partikkelhastigheten.[6] La oss for enkelhets skyld sette $Nk = 1$ og skrive den ideelle gasslov slik:

$$T(p, V) = pV$$

Dette er en funksjon av to variable p og V. Den vanlige notasjonen i en typisk matematikkbok er

$$z = f(x, y) \quad \text{eller} \quad x_3 = f(x_1, x_2) = f(\mathbf{x})$$

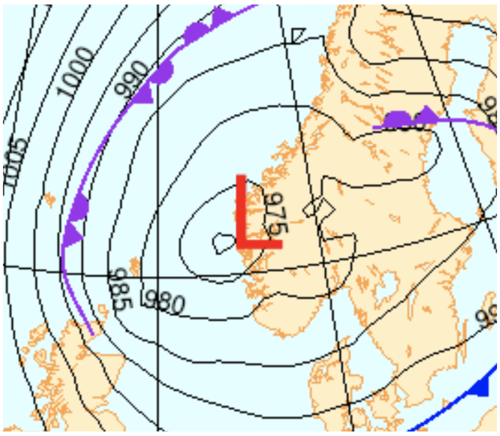
Siden både trykk og volum ikke kan være negative størrelser, er det naturlig å tenke at T er en funksjon fra $(0, \infty) \times (0, \infty)$ til $(0, \infty)$. Du bør tenke på (p, V) som en GPS-koordinat, og T som GPS-koordinatens korresponderende høyde over havet. Funksjonen $T(p, V)$ angir terrenget, og den positive P-aksen peker mot nord.

$\boxed{1}$ Plot $T(p, V)$.
(Hint: google "surface plot matplotlib" eller noe i den dur.)

I termodynamikk kalles nivåkurvene til T **isotermer** siden T er konstant på dem.

$\boxed{3}$ Skisser isotermene til den ideelle gasslov.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law`
[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant`
[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution`



Nivåkurvene til trykk kalles **isobarer**.

4 Hva er trykket på Steinkjer denne dagen?[a]

[a] https://www.met.no/vaer-og-klima/meteorologens-prognosekart

DERIVASJON

Vi har nå to uavhengige variable, og det er interessant å vite hvordan f endres med hensyn på begge. Derfor finnes det to deriverte. De skrivees

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

eller

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h,x_2) - f(x_1,x_2)}{h} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1,x_2+h) - f(x_1,x_2)}{h}$$

om du foretrekker det. De uttales henholdsvis "f derivert med hensyn på x og y (eller x_1 og x_2)".

Å partiellderivere er enkelt: Man finner $\frac{\partial f}{\partial x}$ ved å betrakte y som en konstant, og så derivere i vei med hensyn på x. Samme for y.

79 Finn de partiellderiverte til $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$.

97 Finn de partiellderiverte til

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Det er vanlig å sette opp de partiellderiverte i en radvektor, kalt gradientvektoren:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Grunnen til at vi skriver den som en radvektor og ikke som en kolonnevektor, vil blir snart klart.

107 Finn gradientvektoren til $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$.

113 Finn gradientvektoren til

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

149 Finn gradientvektoren til $g(x,y) = \sin x \sin y$.

Tangentplanet til f i punktet (x_0, y_0) er gitt ved

$$z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

der

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

157 Forklar svigermoren din at tangentplanet tangerer f i $f(x_0, y_0)$.

167 Finn tangentplanet til $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$ i $(1,2)$.

179 Finn tangentplanet til $g(x,y) = \sin x \sin y$ i $(\pi/2, \pi/2)$.

De partiellderiverte forteller noe om stigningen til funksjonen. Tenk at f er et fjell, og at du går på ski. Dersom du peker skiene i enhetsretningen $\mathbf{v}$, er stigningen i denne retningen gitt ved

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f$$

der prikken $\cdot$ betegner skalarproduktet du lærte på videregående. Hvorfor det er slik, skal vi se på senere, når vi har lært kjerneregelen for derivasjon i flere dimensjoner. Denne uken skal vi bare venne oss til at det er slik.

$\boxed{199}$ Finn stigningen på fjellsiden $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$ når du står i punktet $(1, 2)$ og skiene peker rett nordvest.

$\boxed{311}$ Hvilken vei må du peke skiene dersom du vil gå langs med en ekvidistanselinje på fjellet $g(x, y) = \sin x \sin y$, og står i punktet $(\pi/4, \pi/4)$?

$\boxed{337}$ Hva om du vil kjøre rett utfor så bratt som mulig?

Det sies at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Det er bare tull. Ski er visst en kinesisk oppfinnelse:

`https://snl.no/ski`

`https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/`

`https://secretsoftheice.com/news/2021/10/05/the-best-preserved-pair-of-skis-from-prehistory/`

Forresten husker du kanskje den ideelle gasslov $NkT = pV$. Finn

$\boxed{953}$ $\frac{\partial T}{\partial p}$ og $\frac{\partial T}{\partial p}$ $\boxed{967}$ $\frac{\partial V}{\partial p}$ og $\frac{\partial V}{\partial T}$ $\boxed{971}$ $\frac{\partial p}{\partial T}$ og $\frac{\partial p}{\partial V}$

Newtons lov for å løse to ikkelineære likninger med to ukjente, finner du i kap. 9 her: `https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf`

$\boxed{739}$ Bruk Newtons metode til å finne skjæringspunktene mellom en ellipse med halvakser 2 og 5, og en annen ellipse med halvakser 4 og 3, begge sentrert i origo.