

1 - 10 - INTEGRALET II

Viggo Brun ¹ skal ha sagt: "Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!"

Det han mente å si, var nok at derivasjon er ganske lett (det er bare å bruke noen regneregler), mens antiderivasjon kan være ganske vanskelig. Man kan bruke et liv på å trene på antiderivasjon. Et tilforlatelig funksjonsuttrykk kan være enten lett eller vanskelig eller fullstendig håpløst å antiderivere, og det er ofte umulig å avgjøre hvilken av disse som er tilfellet før man har prøvd. Kanskje er det til og med lett, men man kan ikke akkurat det trikset som må brukes; jeg har opplevd å gjøre et integral så mange ganger i forelesning at jeg kan det i søvne, for så å ikke ha noen erindringer overhodet om hva trikset er bare noen få år senere.

Men hvis du kombinerer alt du har lært denne uken med antiderivasjonsreglene du lærte på skolen, har du en grei verktøykasse å jobbe med om du må beregne kompliserte arealer. Nå skal vi se på hva disse arealene kan tolkes som. Integralet dukker opp overalt i anvendelser, og det er ofte mye lettere å forstå anvendelsene om man forstår integralet.

Integrals hemmelighet avsløres ved å se på benevnningen i den avhengige og uavhengige variabelen, gange dem sammen og se hva man får.

For å forstå dette er det nok lurest å dra gjennom masse eksempler. La oss begynne med noe du allerede kan fra gymnaset. Volumet av omdreingslegemet som fremkommer ved å dreie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x)$ en gang om x -aksen, er gitt ved

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Dette er fordi $g(x) = \pi f^2(x)$ er en funksjon som gir arealet av et tverrsnitt. Når vi integrerer g , tolkes *høyden i riemannhistogrammet som et areal*, og når vi så ganger med basen til histogrammet (som tolkes som lengde), blir resultatet et volum.

18 Drei litt på en bit av sinuskurven, for eksempel mellom to av nullpunktene, og finn volumet.

19 Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3}r^3$.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Viggo_Brun

TMA4101/4106/4111/4121



Arbeid er en annen klassiker. I fysikken på skolen lærte du antagelig at arbeid er lik kraft ganger vei. Men i skolefysikk gjerne kraften konstant, slik at du kan gange kraft med vei og få arbeidet. I det virkelige liv endrer kraften seg hele tiden, og da må vi selvfølgelig integrere:

$$\text{arbeid} = \int F dx$$

Jeg anbefaler en titt her: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_13.html

20-1 Institutt for fysikk har målt tyngdeakselerasjonen $g \approx 9.8214675$ i kjelleren på realfagsbygget. Du hopper fra femmeteren på pirbadet. Hvor stort arbeid gjør tyngden på deg frem til du treffer vannspeilet?

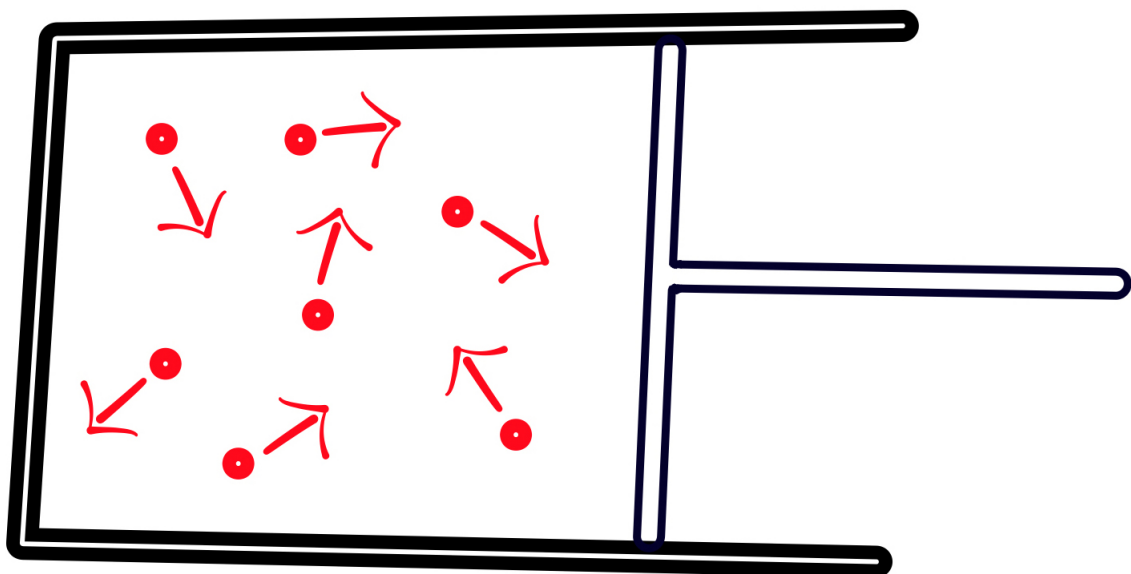
20-2 Newtons gravitasjonslov sier at gravitasjonskraften på deg er

$$F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

der $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ er den universelle gravitasjonskonstanten, m_1 er jordens masse, og m_2 er din masse, og r din avstand fra jordens sentrum. Alan Eustace² hoppet i 2014 i fallskjerm fra en høyde på nesten 42 km. Hvor stort arbeid gjorde tyngden på ham? (Du kan for øvrig se video av Felix Baumgartners 2012-rekord fra 39 km på youtube.)

20-3 Hva er tyngdeakselerasjonen 42 km opp? Hvor stor relativ feil gjør du i forrige oppgave dersom du antar $g \approx 9.8214675$ hele veien fra 42 km oppe og ned til bakken? (Relativ feil er feilen delt på størrelsen det er snakk om. Relativ feil er viktig; hvis du måler avstanden bort til sidemannen og bommer med en meter, er det en ganske dårlig måling, men hvis du måler avstanden til månen og bommer med en meter, er det ganske bra.)

21 Et beholder med et stempel inneholder en ideel gass. Vi tilfører varme, men lar gassen ekspandere slik at temperaturen holdes konstant. Hva er arbeidet stempelet gjør på omgivelsene når volumet går fra V_1 til V_2 ?

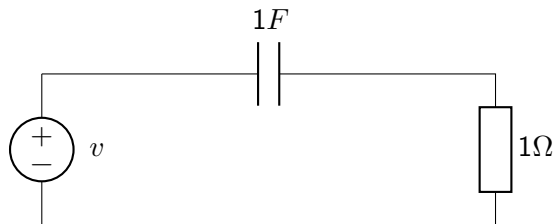


²https://en.wikipedia.org/wiki/Space_diving

Hvis basen i riemannsumhistogrammet er et tidsintervall på t -aksen, og $i(t)$ strømstyrke som funksjon av tiden. blir histogramhøyden litt ladning, og

$$\int_a^b i(t) dt$$

total ladning mellom tidspunktene $t = a$ og $t = b$. La oss si at spenningskilden i kretsen har stått på en god stund slik at kondensatoren blir ladet opp, og så blir spenningskilden slått av ved $t = 0$ slik at $i(0) = 1$.



- 22 Hvor mye ladning har passert gjennom motstanden når kondensatoren er utladet?

Hvis du dreier $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 1/x$ om x -aksen, får du “Gabriels trompet”.

- 29 Finn volumet til Gabriels trompet.



Den siste anvendelsen vi skal ta er litt mer subtil, nemlig buelengde. Lengden av grafen til f fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ er

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Dette er subtilt fordi integranden $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ er en benevningsløs faktor som angir forholdet mellom lengde på en bitteliten bit av x -aksen og en bitteliten bit av kurven (dersom både x og $f(x)$ måles i meter). Kurvelengdekonseptet blir veldig viktig om et års tid når vi skal lære om integrasjon av funksjoner av flere variable, men la oss venne oss til det allerede nå.

- 30 Finn buelengden til $y = x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$.
(Denne går med et nødskrik med penn og papir.)

Likningen for en sirkel er

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{eller} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

om du vil. En generalisering av denne er likningen for en ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Punktene som passer i denne likningen ligger på en ellipse som er sentrert i origo og har halvaksler a og b . Planetene går stort sett rundt solen i ellipsebaner.³

- 31 Finn omkretsen av en ellipse med halvaksler 1 og 2.
(Denne går ikke med penn og papir. Prøv både riemannsummer og trapesmetoden.)
- 32 Finn lengden av en periode av sinuskurven. (Dette integralet kan heller ikke beregnes analytisk.)

Kombinerer du buelengdeformelen med omdreiningslegeme, får du formelen for overflatearealet til et legeme som er fremkommet ved å dreie $f > 0$ om x -aksen:

$$\text{overflateareal} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- 33 Finn overflatearealet til Gabriels trompet.



³<https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

Helt på tampen tror jeg vi tar en lavhengende frukt, nemlig dobbeltintegraler. Grunnen er at dette kommer ganske tidlig i TMA4245 etter juleferien, og det er ikke så vanskelig, men kan være greit å ha sett. Fra økten i uke 35 vet du at du skal tenke på grafen til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som taket i et hus med grunnflate gitt ved $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Integralet

$$\iint_{\Omega} f$$

kan du tenke på som volumet av huset. Dersom Ω er et rektangel er ikke dette vanskelig å utføre, og har du skjønnt omdreiningslegemer, bør det gå greit å skjønne oppskriften. La oss finne volumet under $f(x, y) = xy$, der Ω er rektangelet avgrenset av $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 2$. Vi uttrykker våre følelser for Ω ved å skrive

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$$

som kalles et **kartesisk produkt**, og integralet blir

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^2 \int_0^1 xy \, dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy \, dx \right) dy.$$

Dette kalles et **iterert integral**, for det er et integral inni et annet integral.

Først tar vi det innerste integralet. Det er med hensyn på x , fordi dx står innerst. Vi går fremad med samme taktikk som ved partiellderivasjon; man integrerer med hensyn på x , og later som om y er en konstant:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 xy \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot y \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \, dy$$

Tolkningen av det innerste integralet er nå i samme gate som integranden i omdreiningslegemer; vi har regnet ut arealet av et tverrsnitt. Tenk at du for hver y -verdi har saget volumet i to med en motorsag, parallelt med x -aksen. Funksjonen

$$\int_0^1 xy \, dx = \frac{1}{2}y,$$

altså det innerste integralet, gir arealet av dette tverrsnittet. Hvis du skjønte omdreiningslegemer i R2, skjønte du forhåpentligvis at dersom man har en funksjon som beskriver arealet av tverrsnittet av et volum, finner man det totale volumet ved å integrere tverrsnittsfunksjonen:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 y \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = 1$$

Prøv selv nå. Beregn

$$\boxed{34} \quad \int_0^1 \int_0^3 x + 2y \, dx \, dy \quad \boxed{35} \quad \int_0^3 \int_0^1 x + 2y \, dx \, dy \quad \boxed{36} \quad \int_0^1 \int_0^1 2 + \frac{xy}{10} \, dx \, dy$$

UKENS NØTTER

- 2 Utled formelen

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

for volumet som fremkommer ved å dreie f om y -aksen.
(Dette kalles **synderskallmetoden**. Hvorfor?)

- 4 Vis at arealet til en ellipse med halvakser a og b er πab .
(Denne går an med penn og papir.)

- 7 Du kan prøve å integrere Planckfordelingen:

$$\int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4$$

men da skal du nok få svette ganske bra.

Invarianten til lotkavolterrasystemet er en funksjon av to variable x_1 og x_2 :

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - \ln|x_1| - \ln|x_2|$$

14 Hva er en fornuftig definisjonsmengde?

Grafen til en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ kan du tenke på som et terreng der x_1 og x_2 er lengde- og breddegrad, og $f(\mathbf{x})$ høyden over havet. Punktene som passer i likningen

$$f(\mathbf{x}) = C$$

kalles en **nivåkurve** til f , siden f er konstant denne kurven. Dette er det samme som ekvidistansje-linjene på et orienteringskart. Matplotlib har funksjonalitet for å plote nivåkurver⁴ og flater.⁵

16 La  Ω være enhetskvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$ i $\mathbb{R}^2$. Plot funksjonen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2.$$

Funksjonen i oppgaven over kommer fra **den ideelle gasslov**. Dette er en utledet regel i statistisk mekanikk,⁶ og sier at i en ideell gass følger trykket p , temperaturen T og volumet V formelen

$$pV = NkT,$$

der k er Boltzmanns konstant⁷ og N antall gassmolekyler. Loven er lett å huske for sivilingeniører siden “ NkT ” rimer på “NTH”.

27 Skissér isokorer, isobarer og isotermer. Hvilke funksjoner skisserer du nivåkurvene til?

Dersom f er en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$, kan vi finne stigningen i alle koordinatretninger:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}$$

Dette ser forferdelig ut, men er lett å utføre i praksis. For å finne den partiellderiverte med hensyn på den én variabel *later du som om den andre er en konstant*, og deriverer som vanlig.

26 Finn de partiellderiverte til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_1 x_2.$$

26 Finn $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial V}$, $\frac{\partial p}{\partial T}$, $\frac{\partial p}{\partial V}$, $\frac{\partial V}{\partial T}$ og $\frac{\partial V}{\partial p}$.

⁴https://matplotlib.org/stable/gallery/images_contours_and_fields/contour_demo.html

⁵<https://matplotlib.org/stable/gallery/mplot3d/surface3d.html>

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law

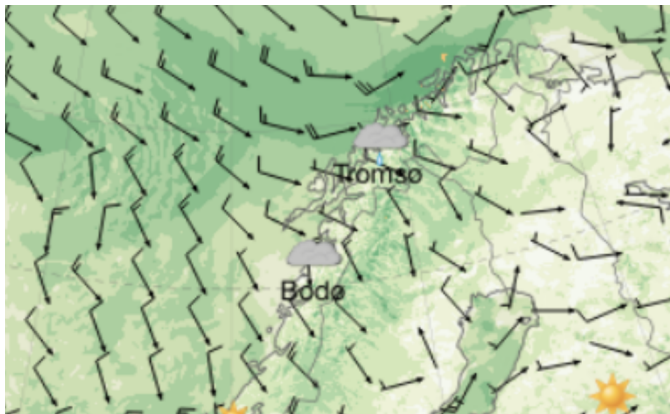
⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant

En funksjon med flere variable ut kan også ha flere variable inn, for eksempel

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{pmatrix}$$

En funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ kalles et **vektorfelt**, og du kan visualisere den som et vindkart. Den avhengige variabelen er GPS-koordinaten, og den uavhengige variabelen er vindens retning og fart.

- 1 Hva er vindstyrke og vindretning i Tromsø?⁸



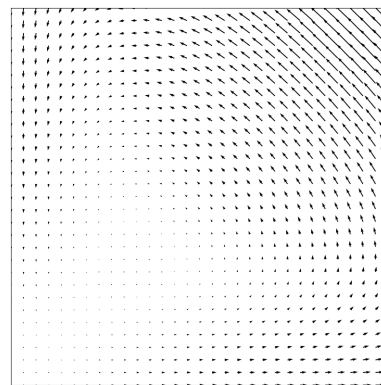
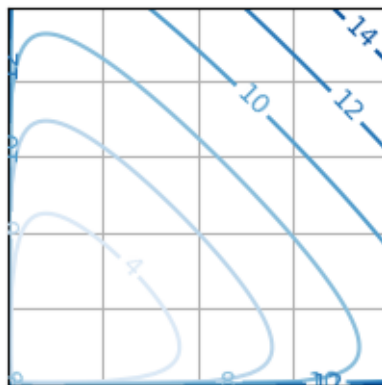
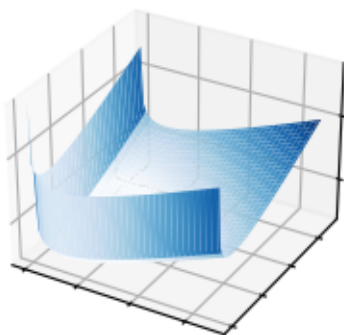
- 21 I matplotlib heter det "quiver". Plott høyresiden i lotkavolterrasystemet.

Matrise-vektorproduktet er forresten en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ dersom $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, for eksempel

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$$

- 20 Er denne funksjonen injektiv? Eksisterer den inverse?

- 22 Her er plot av ymse greier fra denne økten. Hva er hva?



⁸Se her:

<https://hjelp.yr.no/hc/no/articles/360002022134-Vindpiler-og-Beaufortskalaen>
<https://www.yr.no/artikkel/her-ser-du-verdas-vindar-akkurat-no-1.11584952>

Grupper brukes til å modellere romlige symmetrier. Dette er viktig i analyse av molekyler og molekylgitre. For ikke å snakke om tapetmønstre. De brukes også til å holde styr på rotasjoner i rom. Dette er viktig i reguleringsteknikk. En annen algebraisk struktur kalles **gruppe**.⁹ Denne har bare én binær operasjon, og er en av de mest fundamentale algebraiske strukturene. Den binære operasjonen $\cdot$ skal være assosiativ, gruppen G må inneholde En gruppe må inneholde

1 et identitetsselement e slik at $g \cdot e = e \cdot g = g$ for alle $g \in G$.

2 et inverselement for alle $g \in G$, altså et element g^{-1} slik $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Det var alt. Grupper brukes til å modellere symmetri. Det for eksempel kun mulig å konstruere syv frisemønstre,¹⁰ og sytten tapetmønstre.¹¹ Krystallstrukturer kommer i trettito varianter, og disse er veldig viktige i faststoffysikk og kjemi og så videre.¹² Tolvtonesystemet vi bruker i vestlig musikk er en gruppe som heter $\mathbb{Z}_{12}$.¹³

⁹[https://en.wikipedia.org/wiki/Group_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics))

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system

¹³<https://www.jstor.org/stable/25164658>

UKENS NØTTER

Det sies at komponisten Harald Sæverud hørte gjennom alle Joseph Haydns 104 symfonier med LP-spilleren på 45 istedet for 33 omdreininger uten å merke at noe var galt.¹⁴

- 1 En LP-plate har diameter 12 tommer, og roterer med $100/3$ omdreininger per minutt. Finn et vektorfelt som beskriver hastigheten til et punkt på LP-platen.

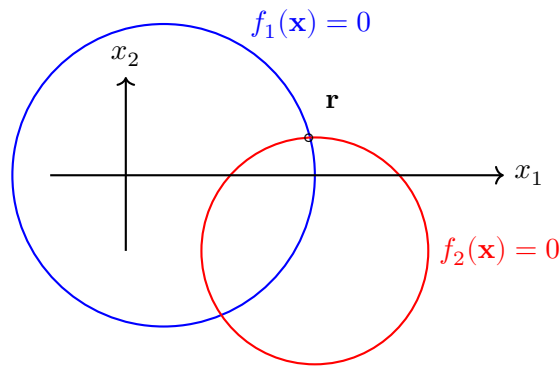


Har du fulgt med på alt til nå i kurset har du i prinsippet kunnskap til å takle det ikkelineære likningssettet

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der $\mathbf{f}$ er en eller annen funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$. Her er en figur som illustrerer dette:

¹⁴Dette ble visst oppklart da Sæverud ringte Jan Henrik Kayser i harnisk for å fortelle ham at hans nye innspilling av Sæveruds samlede pianoverker gikk altfor fort.



Numeriske metoder er stort sett iterative. Vi lar $\mathbf{x}_n$ være iterasjon nummer n . **Newtons metode** er gitt ved

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \left(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

der

$$\left(\mathbf{f}' \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

5 Test ved å finne skjæringspunktene mellom de to ellipsene

$$3x^2 + 2xy + y^2 - 2x - y = 1 \quad \text{og} \quad x^2 + 2xy + 6y^2 - x - 2y = 1$$

Hint: Det går greit å bruke `np.linalg.solve`, men for 2×2 -matriser finnes det en formel:

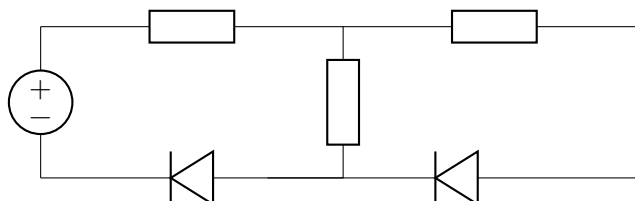
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Det finnes en generell formel for inversen til en inverterbar matrise:

https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix#Analytic_solution

Dette kalles **kofaktorekspansjon**. Det er en og annen gubbe (inkludert meg) som sporadisk synes dette er nyttig å vite om. Jeg har hatt bruk for det én gang i livet - i den eneste artikkelen jeg har ført i pennen noen gang. Den var kjempebra og biveilederen min fikk den publisert i en obskur bulgarsk konferansejournal rett før han ble pensjonist.

6 Sett kretsparametrene til dine favorittverdier, og finn alle strømmer og spenninger.



Det finnes liknende metoder for lineære systemer. Hvis du skal løse et stort system og ikke orker all gaussingen, kan du bruke en **iterativ løser**. Fikspunktiterasjonen fungerer på for eksempel på lineære systemer også.

7 Skriv om systemet

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

til en likning på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

og kjør fikspunktiterasjon. Dette kan gjøres på mange måter. Oppførselen vil antagelig avhenge av forholdet mellom a og n . Kan du se hvordan?