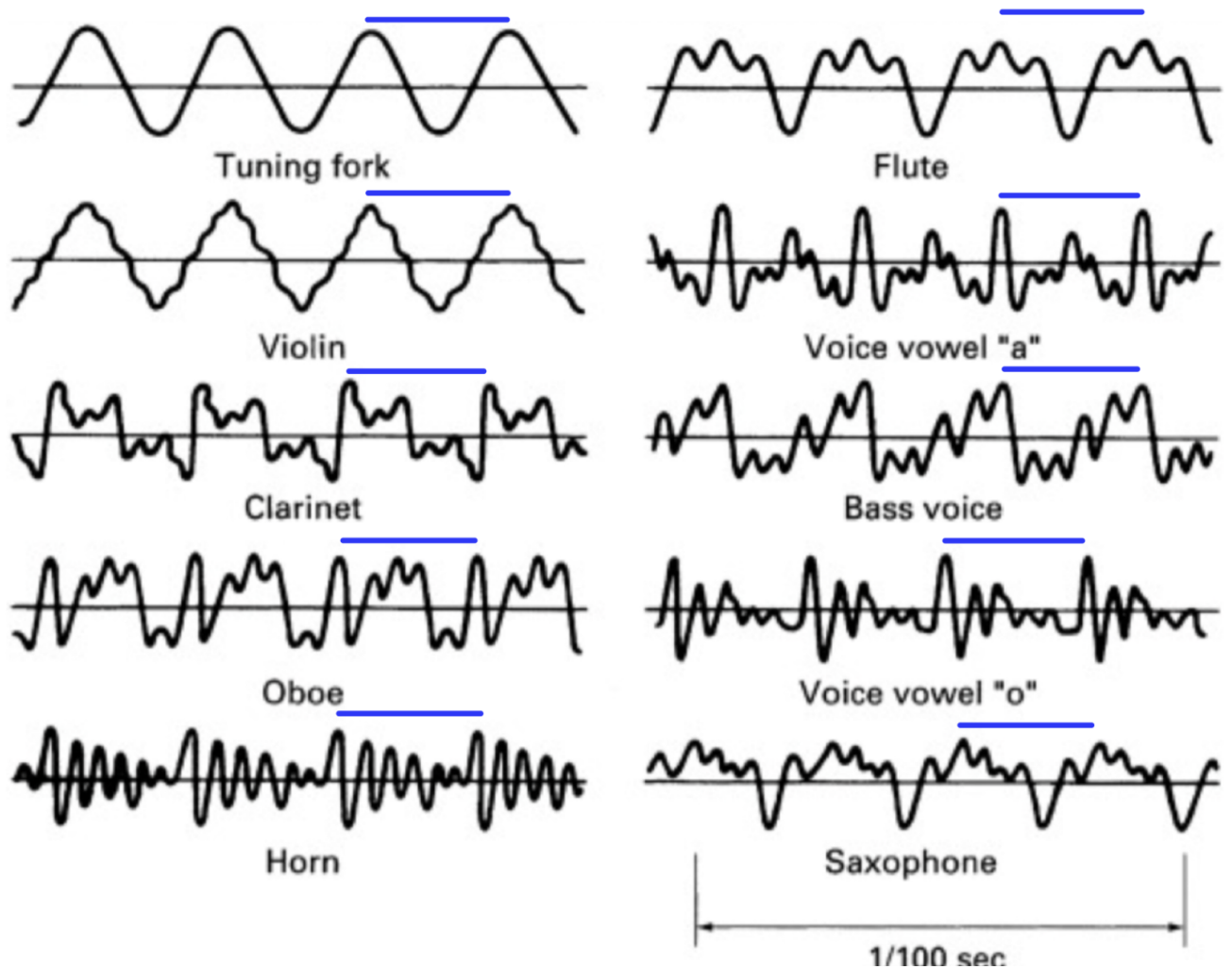


2 - 4 - KOMPLEKSE FOURIERREKKER - LF

3



4 Hvis $f = 100$ hertz, blir $\omega = 2\pi f \approx 628$ radianer per sekund.

5 Du finner ymse koder som plotter fourierrekker her:
<https://folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/fourierrekker/>

som sier akkurat det samme, men på en måte som er mye enklere å huske. Dette kalles **fourierrekker**, og a_n , b_n og c_n kalles **fourierkoeffisientene**.

6 Lett! Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

og dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \frac{1}{i(n-m)\omega} e^{i(n-m)\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

slik at

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Nå tar vi likningen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

og ganger med $e^{-im\omega t}$ og integrerer:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-im\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt$$

og så gjør Satan en egentlig ulovlig flytting av integraltegnet (siden summen går mot uendelig), slik at hen kan bruke ortogonaliteten og drepe alle ledd i summen unntatt ett:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = c_m \cdot T$$

slik at hun kan skrive

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt$$

7] Firkantbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T/2 \end{cases}$$

Denne er hverken odde eller jevn, men vi ser raskt at

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\omega t) dt = 0$$

for alle $n \geq 1$, mens

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt = 1$$

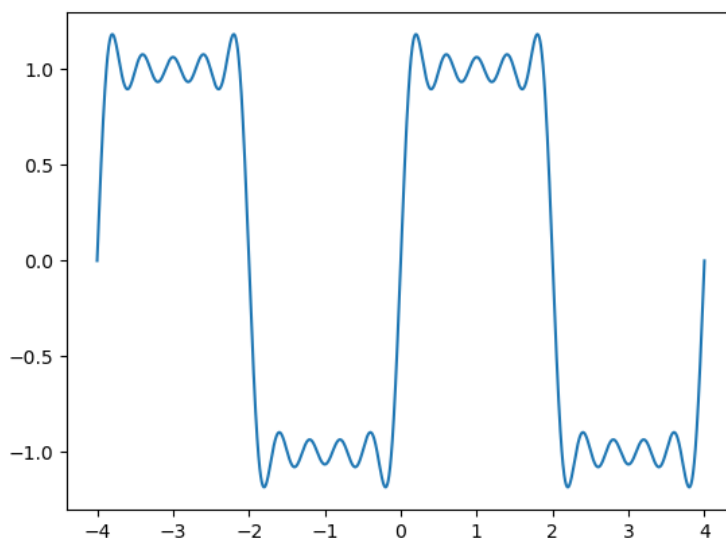
Videre kan vi beregne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} (-\cos(n\omega t)) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevne } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\omega t).$$

Vi skriver \sim og ikke $=$ siden fourierrekken ikke tar den samme verdien som signalet i $t =$ heltallsmultipler av π . Her er plot av en partialsum:



Hvis vi vil ha rekken på kompleks form, kan vi enten regne ut fra scratch, eller bruke formlene

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

La oss ta det fra scratch. For $n = 0$ får vi

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{2},$$

mens for $n \neq 0$, får vi

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{-in\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi in} e^{-in\omega t} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{2\pi in} (1 - e^{-\pi in}) \\ &= \frac{1}{2\pi in} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{1}{\pi in} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevne } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t}.$$

9 Sagtannbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = t.$$

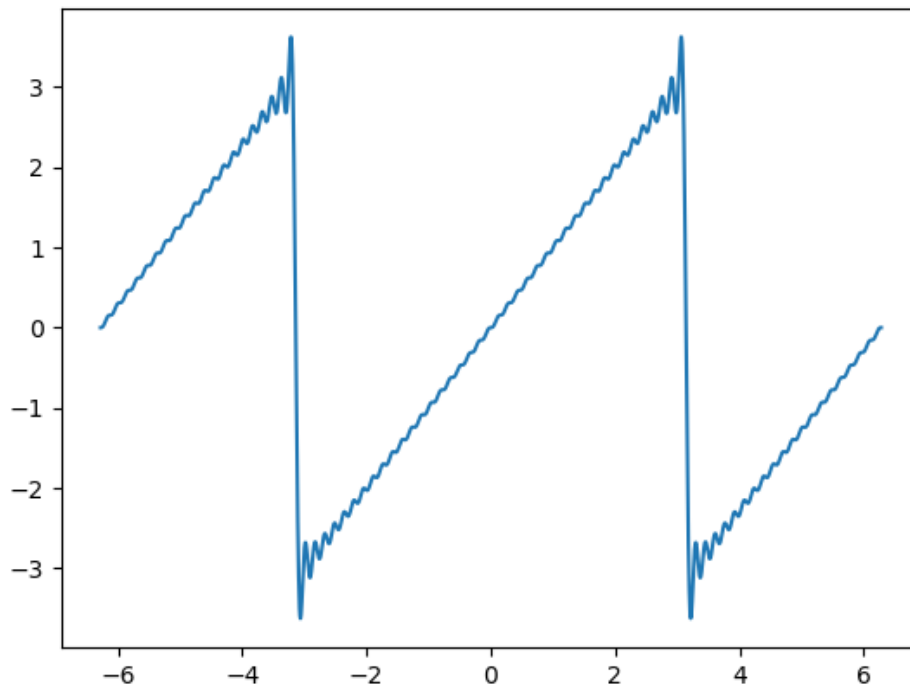
Denne er odde, så vi vet at $a_n = 0$ for alle n . Vi beregner

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} t \cos(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right) \\ &= \frac{-2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

Her er plot av en partialsum:



8] Trekantbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Denne er jevn, så vi vet at $b_n = 0$ for alle n . Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

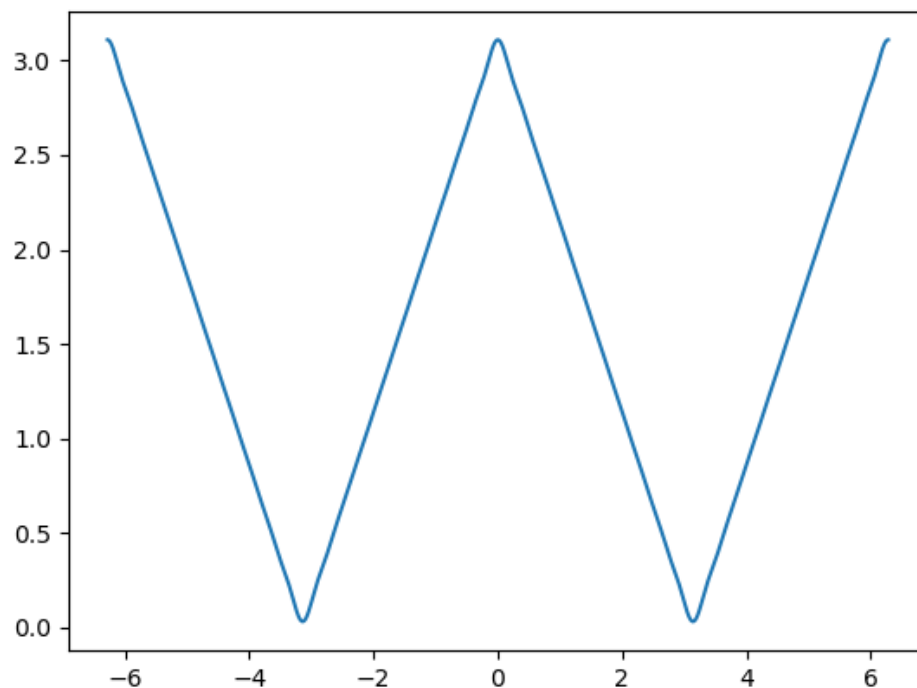
og

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} (\pi - t) \sin(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevn } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t).$$

Her er plot av en partialsum:



- 10 Det enkleste er å ta det direkte fra koeffisientformlene. La n være et naturlig tall. Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt + \frac{i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \end{aligned}$$

Formler for den andre veien tar vi med gausseliminasjon. Legger vi sammen

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{og} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

får vi $a_n = c_n + c_{-n}$, og trekker vi dem fra hverandre, får vi $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

- 10 Astrid gjorde dette i øvingsforelesning den 1. februar.

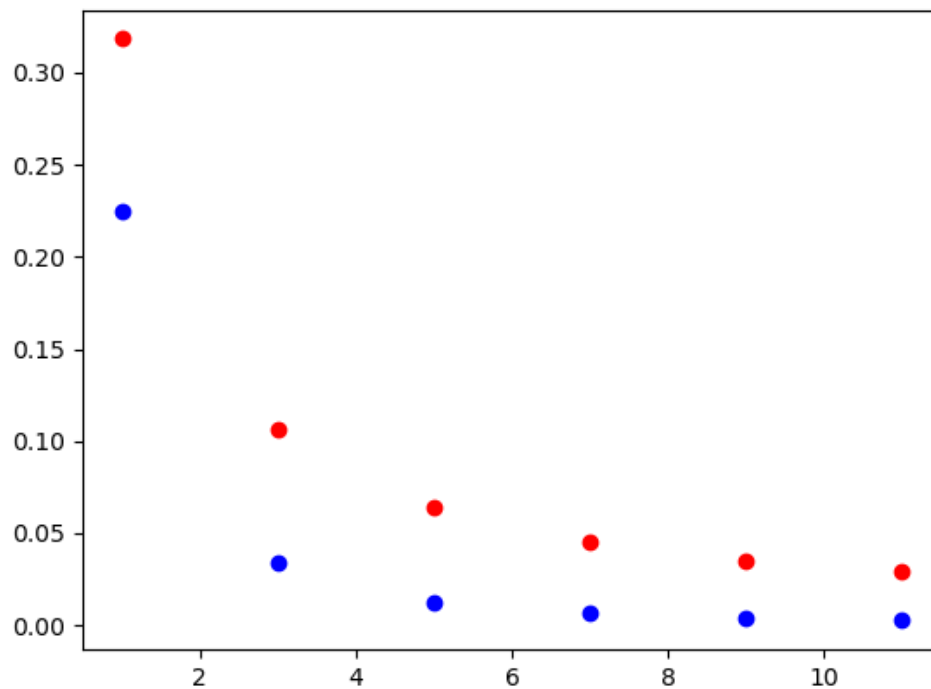
- 11 Amplitudene er absoluttverdiene til fourierkoeffisientene. Amplitudene koeffisientene til x er

$$\left| \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{2n-1} \right| = \frac{1}{\pi(2n-1)}$$

mens amplitudene til y er (jeg setter $RC = 1$ for enkelhets skyld)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)i+1} \right| &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \cdot \left| \frac{1}{(2n-1)i+1} \right| \\ &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \cdot \left| \frac{(2n-1)i-1}{(2n-1)^2+1} \right| \\ &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{(2n-1)^2+1}}{(2n-1)^2+1} \end{aligned}$$

Her er plot av amplituder (x er røde og y er blå) for $n = 1 \dots 11$. Merk hvordan de blå overtone dempes mer og mer når n stiger.



12 Amplituderresponsen er

$$\begin{aligned} |H(i\omega)| &= \left| \frac{1}{RCi\omega + 1} \right| \\ &= \left| \frac{-RCi\omega + 1}{(RC\omega)^2 + 1} \right| \\ &= \frac{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \end{aligned}$$

mens faserresponsen er

$$\begin{aligned} \arg(H(i\omega)) &= \arg\left(\frac{1}{RCi\omega + 1}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-RCi\omega + 1}{(RC\omega)^2 + 1}\right) \\ &= \arg(1 - RCi\omega) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}\right) \end{aligned}$$