TMA4101/4106/4111/4121

2 - 2 - FOURIERANALYSE I

I forrige uke kom vi nesten i mål med å løse varmelikningsproblemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \qquad\qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = f(x).$$

I likhet med Joseph Fourier kom vi frem til at funksjoner på formen

$$u_n(x,t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

tilfredsstiller både differensiallikningen og randkravene, men så stoppet alt opp da vi skulle prøve å tilpasse initialkravet $u(x,0) = f(x)$.

$\boxed{1}$ Nå er det antagelig lurt å dobbeltsjekke dette, så du er sikker på at du henger med så langt, for denne utledningen kan komme på eksamen.

Initialkravet tenker vi på som at temperaturen i stangen er fordelt på en bestemt måte ved $t = 0$. Dersom vi evaluerer u_n i $t = 0$, får vi

$$u_n(x,0) = b_n \sin(nx) = f(x),$$

og nå skjønner alle at dette kommer ikke til å gå spesielt bra med mindre f er en skalarmultippel av $\sin(nx)$. Men vent litt. Superposisjonsprinsippet må da gjelde. Lineærkombinasjonen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

tilfredsstiller også differensiallikningen og randkravene, så om f er en lineærkombinasjon av sinusfunksjonene i denne summen, må det vel være mulig å finne b_n slik at

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) = f(x)?$$

Svaret på dette er null stress joggedress, og nå skal vi finne koeffisientene. De kan nemlig finnes ved å bruke et standardtriks som vi skal bruke mange mange ganger dette semesteret. Det er vanlig å introdusere trikset i to steg. Først en observasjon:

$\boxed{2}$ Vis først at sinusfunksjonene i lineærkombinasjonen er ortogonale på $[0,\pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} \pi/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Og så selve trikset:

$\boxed{3}$ Gang likningen

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) = f(x)$$

med $\sin(mx)$, integrer fra $x = 0$ til $x = \pi$, og vis at dersom likningen kan løses, må

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

I resonnementet over ligger det som grunnpremiss at f er en lineærkombinasjon av sinusfunksjonene i summen på venstre side. Dersom f er noe annet, bryter alt sammen; det er meningsløst å prøve å løse for eksempel likningen

$$b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) = x$$

for b_1 og b_2, for det er åpenbart at denne likningen ikke kan løses. Funksjonen $f(x) = x$ kan åpenbart ikke skrives som en lineærkombinasjon av $\sin(x)$ og $\sin(2x)$. Leonhard Euler selv trodde likningen over kun kunne løses så lenge f var en lineærkombinasjon av sinusfunksjoner.

Fouriers sprø ide var å la summen gå mot uendelig. Han tenkte at dersom du bare tok med mange nok sinusfunksjoner, ville

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = f(x)$$

dersom

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

uansett hva f er. Dette har vist seg å være sånn omtrent riktig, [1] men Fourier ble faktisk ikke tatt seriøst av andre matematikere til å begynne med, for ideen er rar. Hvis du er ordentlig interessert i matematikk anbefaler jeg nå at du går på nett og finner Stein og Shakarchis klassiker "Fourier Analysis: An Introduction" fra 2003. Hvis ikke, foreslår jeg at du går videre med neste oppgave.

$\boxed{4}$ La oss prøve. Vi lar $f(x) = x(\pi - x)$. Regn ut

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx,$$

og plott partialsummene

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

og f oppå hverandre i python.
(Utregningen av integralet er litt hårete. Hold tungen beint i munnen!)

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series

Hvis du regna riktig i oppgaven over, fikk du

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{odde } n \end{cases}$$

slik at

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)x).$$

$\boxed{5}$ Skriv opp løsningen til varmeledningsproblemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = x(\pi - x)$$

og plot løsningen for noen utvalgte tidspunkt, slik at du er sikker på at du forstår omtrent hva du har regna ut.

Randkravene

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

kalles **dirichletrandkrav**. Disse forteller noe om hvordan løsningen skal oppføre seg i endepunktene, for eksempel at temperaturen holdes ved null grader eller at den vibrerende strengen er spent fast der. Nå hadde det sikkert vært på sin plass å regne ut flere eksempler på fourierrekker, slik at vi kunne regne ut flere eksempler på løsninger av akkurat det samme varmeledningsproblemet, men vi skal regne ut ganske mange fourierrekker dette semesteret, så vi haster videre. Hvis vi bytter ut dirichletrandkravene med

$$u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0$$

kalles det **von-neumann-randkrav**. Du husker forhåpentligvis Fouriers varmelov, som sier at varmestrømmen i watt per kvadratmeter er proporsjonal med temperaturgradienten u'.

$\boxed{6}$ Forklar at dersom endepunktene på stangen er isolerte istedet for holdt ved temperaturen 0, må vi løse von-neumann-problemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \qquad u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

Hvis du gjentar alle stegene i løsningen av dirichletproblemet (altså alt vi har gjort dette semesteret frem til nå), kan du løse dette problemet også med bittelitt modifikasjon.

$\boxed{7}$ Forklar at von-neumann-problemet har løsning

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx) \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

$\boxed{8}$ Løs problemet over for initialvarmefordelingen $f(x) = x$.

Vi begynte med varmelikningen, siden det er den det er minst herk med. Nå tar vi det korresponderende opplegget for bølgelikningen. Bølgelikningen er i bunn og grunn bare Newtons andre lov, og vi er vant til fra klassisk mekanikk at man må spesifisere både startposisjon og startfart for å bestemme bevegelsen. For bølgelikningen betyr dette at vi må både spesifisere strengens form og fart før vi slipper den:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x).$$

Dirichletproblemet blir

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x).$$

(Hvis du bare drar i strengen og så slipper den, er $g = 0$.)

$\boxed{9}$ Gjenta det du gjorde for varmelikningen over, og forklar at løsningen er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx)$$

der

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad \text{og} \qquad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx.$$

Dersom du har stående luftbølger i en orgelpipe eller et blåseinstrument, vil våre erkefiender fysikerne fortelle at det er von-Neumann-randkrav som gjelder:

$$\ddot{u} = c^2 u'' \qquad u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x).$$

$\boxed{10}$ Forklar at von-neumannproblemet har løsning

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \cos(nx)$$

der

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \text{og} \qquad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx.$$

Kort fortalt handler **fourieranalyse** om å skrive en funksjon som en uendelig sum av sinuser og cosinuser. La oss avslutte med å skrive opp noe veldig generelt. Vi har holdt oss til intervallet $[0, \pi]$ så langt, fordi det er dette intervallet som er mest naturlig når man løser bølge- og varmelikningen. Men nå skal vi kjøre alt på $[-\pi, \pi]$ istedet, og så skal vi se hvordan $[0, \pi]$ blir et pent spesialtilfelle siden. Hvis f er deriverbar og $f(-\pi) = f(\pi)$, er det alltid mulig å skrive f som en **fourierrekke**

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

på $[-\pi, \pi]$, der koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\ dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\ dt.$$

La oss dra oss selv gjennom forklaringen.

$\boxed{11}$ Først må vi sjekke at alle sinusene og cosinusene er ortogonale på $[-\pi, \pi]$. Regn ut at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\ dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\ dx = 0 \qquad \text{alle } m, n$$

Oppgaven over litt lang og tung, men den er steg én i et tostegsresonnement vi skal gjøre mange mange ganger dette semesteret, så du bør forstå det. (Det er nå andre gang vi gjør essensielt det samme resonnementet; første gang var i begynnelsen av denne økten.)

$\boxed{12}$ Steg to i standardresonnementet er å gange likningen

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

med alle sinus- og cosinusfunksjonene i oppgaven 11, integrere fra $-\pi$ til π, bruke gjøre kanselleringene du utledet til å finne formlene

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\ dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\ dt.$$

(Jeg sier "finne" og ikke "utlede", for dette resonnementet er alt annet enn stringent. Siden summene er uendelige gjør vi masse greier som man må opp på et helt annet teknisk nivå for å gjøre ordentlig. Kanskje vi kommer der mot slutten av semesteret. Vi får se.)

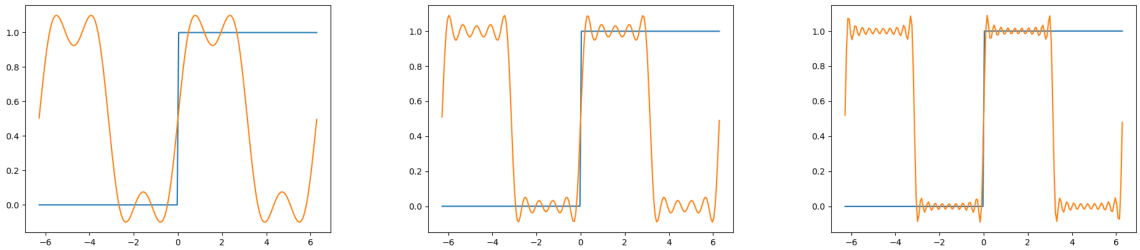
La oss nå beregne et par fourierrekker. Finn fourierrekkene til

$\boxed{13}$ **Enhetssprangfunksjonen** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$

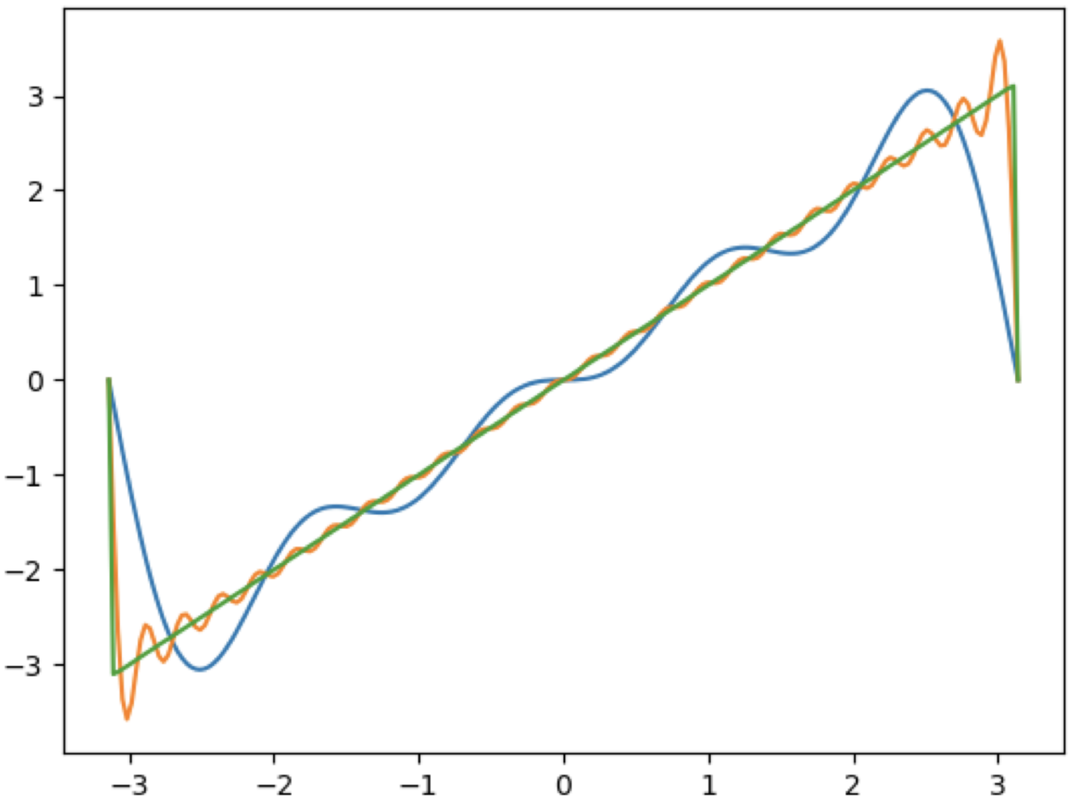
$\boxed{14}$ **Sagtannfunksjonen** $f(x) = x$

$\boxed{15}$ **Trekantfunksjonen** $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{for } x < 0 \\ \pi - x & \text{for } x \geq 0. \end{cases}$

I oppgavene over, bør du plotte noen partialsummer for å dobbeltsjekke at du har regna riktig. Her er S_2, S_5 og S_{10} for enhetssprangfunksjonen:



og S_5 (blå), S_{25} (gul) og S_{5000} (grønn) for sagtannfunksjonen:



Hvis du leste de to forrige sidene nøye, la du kanskje merke til at alle funksjonene i oppgave 13-15 bryter kravene om at f må være deriverbar og at $f(-\pi) = f(\pi)$. Det som vanligvis skjer når man bryter regularitetskravene til f, er at fourierrekken konvergerer til noe annet enn $f(x)$ i enkelte punkter på $[-\pi, \pi]$. Av denne grunnen er det vanlig å skrive

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

istedet for

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

$\boxed{16}$ Finn punkter på $[-\pi, \pi]$ der fourierrekkene i oppgave 13-15 ikke konvergerer til $f(x)$.

Det andre som er verdt å legge merke til, er at noen ganger trenger man bare sinuser, andre ganger trenger man bare cosinuser. Dette har å gjøre med odde og jevne funksjoner. Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

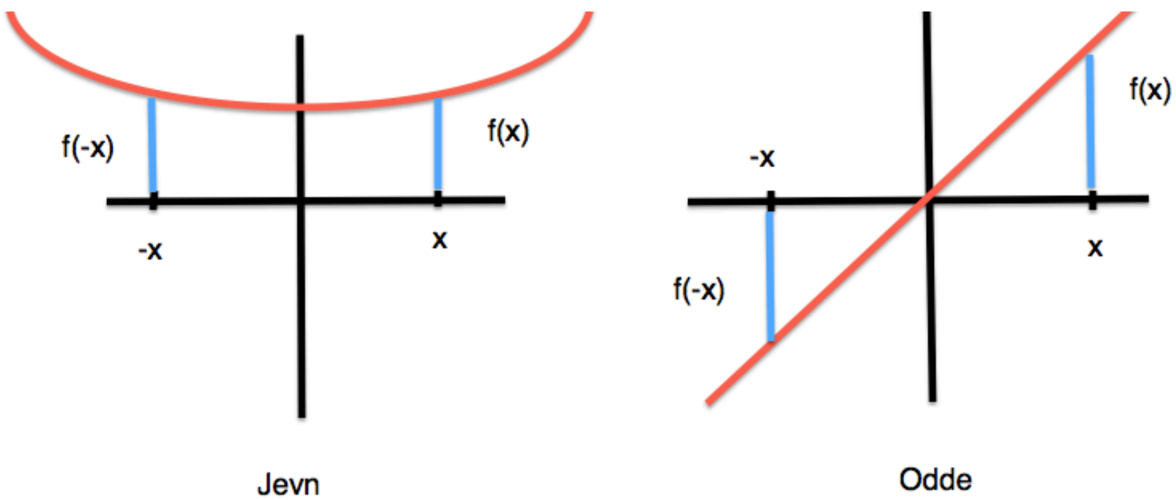
Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y-aksen. En rask kikk på figur viser at

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dt = 2\int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

for jevne funksjoner.



Alt dette har litt å si for hvorfor vi for noen funksjoner kun trenger sinuser, og hvorfor vi for noen funskjoner kun trenger cosinuser.

$\boxed{17}$ Vis at

- produktet av to jevne funksjoner er en jevn funksjon.
- produktet av to odde funksjoner er en jevn funksjon.
- produktet av en jevn og en odde funksjoner er en odde funksjon.

$\boxed{18}$ og bruk dette til å forklare hvorfor du

- kun trenger sinuser i oppgave 14.
- kun trenger cosinuser i oppgave 15
- kun trenger sinuser i oppgave 13 (litt vanskeligere).