2 - 2 - DIFFERENSIALLIKNGINGER VI - LF

$\boxed{1}$ Det kjappeste er nok å gange med e^{2t} på begge sider, omskrive cosinusfunksjonen med Eulers formel

$$\dot{x}(t)e^{2t} + 2x(t)e^{2t} = e^{2t}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \left(\frac{e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t}}{2}\right)$$

og så integrere

$$x(t)e^{2t} = c + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} + \frac{1}{2-i}e^{(2-i)t}\right)$$

og så gange opp med e^{-2t}:

$$\begin{aligned} x(t) =& ce^{-2t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+i}e^{it} + \frac{1}{2-i}e^{-it}\right) \\ =& ce^{-2t} + \frac{1}{5}\left(\frac{2-i}{2}e^{it} + \frac{2+i}{2}e^{-it}\right) \\ =& ce^{-2t} + \frac{1}{5}\left(2\cos t + \sin t\right) \end{aligned}$$

Bruker vi initialkravet $x(0) = 0$, får vi $0 = c + \frac{2}{5}$ slik at

$$x(t) = \frac{1}{5}\left(2\cos t + \sin t - 2e^{-2t}\right).$$

$\boxed{2}$ Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

som forteller oss at den homogene løsningen er

$$x_h(t) = e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Den partikulære løsningen er helt klart

$$x_p(t) = 1,$$

slik at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + 1.$$

Initialkravet $x(0) = 0$ gir

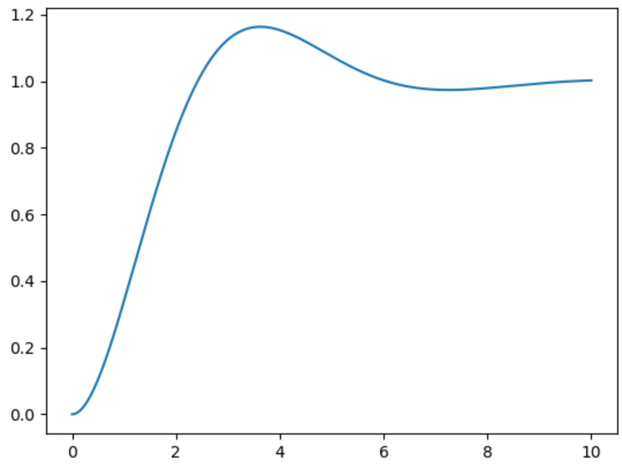
$$c_1 + 1 = 0$$

slik at $c_1 = -1$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir

$$\frac{1}{2} + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

slik at $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Løsningen er altså

$$x(t) = 1 - e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$



$\boxed{3}$ Å gausseliminere et slik system, lærte du i høst. Vi beregner

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Hvis vi velger $x_3 = s$ og $x_4 = t$, blir

$$x_2 = 2 - 2s - 3t$$

og

$$x_1 = \frac{2 - 3(2 - 2s - 3t) - 4s - 5t}{2} = -2 + s + 2t,$$

slik at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + s + 2t \\ 2 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Merk nå at strukturen på dette problemet ligner strukturen på det forrige. Vektorene

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er løsninger av det homogene systemet

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right.$$

mens vektoren

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kun passer i det inhomogene systemet

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right.$$

Dette går igjen hver gang du har en system som er en lineæroperator L og en vektor y og så leter du etter x slik at $Lx = y$.

4 Det er slitsomt å skrive $\sqrt{3}/2$ veldig mange ganger, så la oss definere

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

slik at røttene til det karakteristiske polynomet kan skrives

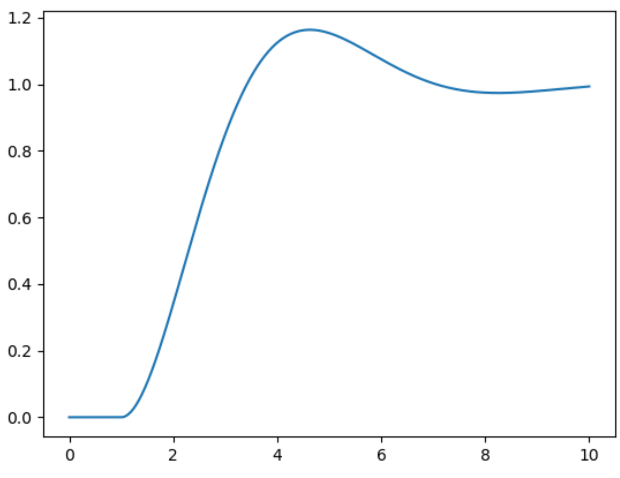
$$\lambda = \alpha \pm i\omega_0$$

og løsningen

$$x(t) = 1 - e^{\alpha t}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\omega_0 t)\right).$$

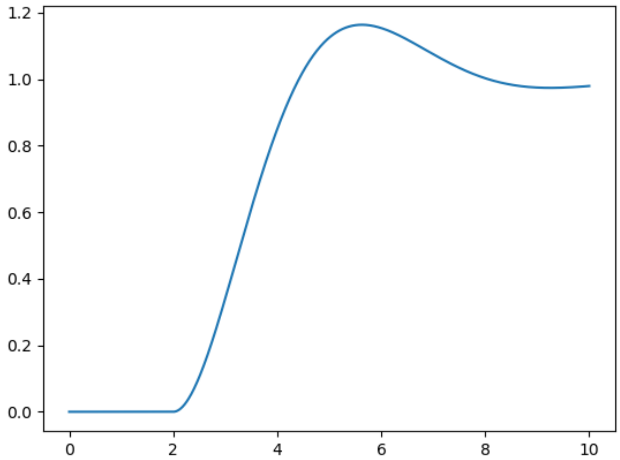
Poenget med Iti-trikset er at om vi skrur på den drivende kraften $f(t) = 1$ ved tiden $t = 1$ istedet for $t = 0$, vil systemet oppføre seg akkurat likt. Vi kan derfor ta løsningen av det forrige problemet og skru den på ved tiden $t = 1$ istedet:

$$x(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-1)}\left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\omega_0(t-1))\right)\right)u(t-1)$$



5 Samme her:

$$x(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-2)}\left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\omega_0(t-2))\right)\right)u(t-2)$$



6 Her gjelder det å skjønne at superposisjonsprinsippet må brukes for det det er verdt. Hvis vi definerer

$$x_1(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-1)}\left(\cos\left(\omega_0(t-1)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega_0(t-1)\right)\right)\right)u(t-1)$$

og

$$x_2(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-2)}\left(\cos\left(\omega_0(t-2)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega_0(t-2)\right)\right)\right)u(t-2)$$

og definerer lineæroperatoren

$$L(x) = \ddot{x} + \dot{x} + x,$$

har vi

$$L\left(x_1(t)\right) = u(t-1)$$

og

$$L\left(x_2(t)\right) = u(t-2)$$

slik at

$$L\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = L\left(x_1(t)\right) - L\left(x_2(t)\right) = u(t-1) - u(t-2).$$

Med andre ord er løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ &= \left(1 - e^{\alpha(t-1)}\left(\cos\left(\omega_0(t-1)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega_0(t-1)\right)\right)\right)u(t-1) \\ &- \left(1 - e^{\alpha(t-2)}\left(\cos\left(\omega_0(t-2)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega_0(t-2)\right)\right)\right)u(t-2). \end{aligned}$$

7 Denne skal jeg regne ut med laplacetransform litt lenger ned, og så skal vi se på løsningen og så skal vi skjønne alt.

8 Siden eksponensialfunksjonen er egenfunksjon til derivasjonsoperatoren, er den også egenvektor til lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorer:

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{at} + \frac{d}{dt}e^{at} + e^{at} = \left(a^2 + a + 1\right)e^{at}$$

Av denne grunn er det vel smart å gjette på

$$x_p(t) = Ce^{i\omega t}$$

som partikulærløsning. Vi setter denne inn på venstresiden og får

$$C\frac{d^2}{dt^2}e^{i\omega t} + C\frac{d}{dt}e^{i\omega t} + Ce^{i\omega t} = \left((i\omega)^2 + i\omega + 1\right)e^{i\omega t}$$

Denne skal jo helst bli lik $e^{i\omega t}$, og det blir den dersom

$$C = \frac{1}{(i\omega)^2 + i\omega + 1} = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

$\boxed{9}$ Her er det bare å skrive $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$ og bruke forrige oppgave og superposisjonsprinsippet:

$$\begin{aligned} x_p(t) =& \frac{1}{2}\left(H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}\right) \\ =& \frac{1}{2}\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1} + \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i\omega + 1} \end{aligned}$$

Skal du ha initialkrav må du selvfølgelig ha med den homogene løsningen, men jeg droppa initialkrav i denne oppgaven for det blir så mye regning.

$\boxed{10}$ Vi skriver

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right),$$

slik at

$$\begin{aligned} x_p(t) =& \frac{1}{2}\left(H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}\right) \\ =& \frac{1}{1-\omega^2} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \\ =& \frac{1}{1-\omega^2}\cos\omega t. \end{aligned}$$

Den homogene løsningen er

$$x(t) = A\cos t + B\sin t.$$

Når $\omega = 1$ er den påtrykte kraften en homogen løsning, og uttrykket over er ikke definert. Man kan gå i Arnes bok og oppdage at partikulærløsningen i dette tilfellet er

$$x_p(t) = t\sin t$$

som øker i amplitude etterhvert som tiden går. Om man påtrykker en ekstern kraft som allerede er en homogen løsning, skjer det samme som når du løper frem og tilbake på fergedekket; gjør du det med riktig frekvens, får din lille masse hele fergen til å vugge frem og tilbake.

$\boxed{11}$ La $x(t) = e^{at}$. Så lenge realdelen til s er større enn a, får vi

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a}.$$

$\boxed{12}$ La $\sigma > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}) &= \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\,dt \\ &= x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0).\end{aligned}$$

Vis at

$\boxed{13}$ Vi bruker linearitet og regneregelen over på venstre side, og får

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\dot{x} + ax\right) =&\mathcal{L}\left(\dot{x}\right) + a\mathcal{L}\left(x\right) \\ =&s\mathcal{L}\left(x\right) - x(0) + a\mathcal{L}\left(x\right) \\ =&(s+1)\mathcal{L}\left(x\right) - 1\end{aligned}$$

mens høyre side blir

$$\mathcal{L}\left(0\right) = 0$$

slik at

$$(s+1)\mathcal{L}\left(x\right) - 1 = 0$$

eller

$$\mathcal{L}\left(x\right) = \frac{1}{s+1}.$$

Sammenlikner vi med forrige oppgave og tror på rettferdighet i verden, kan vi nå slutte at

$$x(t) = e^{-t}.$$

$\boxed{14}$ Lett:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\ddot{x}) &= s\mathcal{L}(\dot{x}) - \dot{x}(0) \\ &= s\left(s\mathcal{L}(x) - x(0)\right) - \dot{x}(0) \\ &= s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

Høyere ordens regneregler er null stress, bare fortsett i samme duren.

$\boxed{15}$ La $x(t) = \cos t$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{it} + e^{-it}\right)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}$$

$\boxed{16}$ La $x(t) = \sin t$, slik at $\dot{x}(t) = \cos t$ og $x(0) = 0$. Derivasjonsregelen

$$s\mathcal{L}(x) - x_0 = \mathcal{L}(\dot{x})$$

gir

$$s\mathcal{L}(x) = \frac{s}{s^2+1},$$

slik at

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2+1}.$$

$\boxed{18}$ Fra nå av skriver jeg $X(s)$ og ikke $\mathcal{L}(x)$. Det er litt lettere å lese. Vi laplacetransformerer begge sider av likningen, bruker lineariteten, derivasjonsreglene og initialkravene, og får

$$s^2X(s) - s + X(s) = 0$$

slik at

$$X(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

som gir at

$$x(t) = \cos t.$$

$\boxed{19}$ Ditto. Vi transformerer

$$s^2X(s) - 1 + X(s) = 0$$

og løser

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

slik at

$$x(t) = \sin t.$$

$\boxed{20}$ Ditto. Vi får

$$s^2X(s) - s + sX(s) - 1 + X(s) = 0,$$

som gir

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}.$$

Merk hvordan nevnern i høyresiden er det karakteristiske polynomet til likningen. La den ene roten være $\lambda = \alpha + i\omega_0$ slik at den andre blir $\overline{\lambda} = \alpha - i\omega_0$. Vi delbrøksoppspalter slik:

$$\frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{A}{s-\lambda} + \frac{B}{s-\overline{\lambda}}$$

og ganger opp med s^2+s+1, slik at

$$s+1 = A\left(s-\overline{\lambda}\right) + B\left(s-\lambda\right)$$

Sammenlikning av ordener i s på høyre og venstre side gir

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A\overline{\lambda} - B\lambda &= 1 \end{aligned}$$

som løses av

$$A = \frac{1+\lambda}{\lambda-\overline{\lambda}} = \frac{1+\lambda}{2i\omega_0} \qquad B = \frac{1+\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-\lambda} = -\frac{1+\overline{\lambda}}{2i\omega_0}$$

slik at

$$\frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{2i\omega_0}\left(\frac{1+\lambda}{s-\lambda} - \frac{1+\overline{\lambda}}{s-\overline{\lambda}}\right)$$

Nå gjelder det å holde tungen beint i munnen:

$$
\begin{aligned}
x(t) =& \frac{1}{2i\omega_0}\left((1+\lambda)\,e^{\lambda t}-\left(1+\overline{\lambda}\right)e^{\overline{\lambda}t}\right)\\
=& \frac{e^{\alpha t}}{2i\omega_0}\left((1+\lambda)\,e^{i\omega_0 t}-\left(1+\overline{\lambda}\right)e^{-i\omega_0 t}\right)\\
=& \frac{e^{\alpha t}}{2i\omega_0}\left((1+\lambda)\,e^{i\omega_0 t}-\overline{(1+\lambda)\,e^{i\omega_0 t}}\right)\\
=& \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0}\mathsf{im}\,(1+\lambda)\,e^{i\omega_0 t}\\
=& \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0}\mathsf{im}\,((1+\alpha+i\omega_0)\,(\cos(\omega_0 t)+i\sin(\omega_0 t)))\\
=& \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0}\,(\omega_0\cos(\omega_0 t)+(1+\alpha)\sin(\omega_0 t))\\
=& e^{\alpha t}\left(\cos(\omega_0 t)+\frac{1+\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)
\end{aligned}
$$

Hvis vi sammenlikner denne strategien med å lete opp den homogene løsningen

$$x_h(t)=e^{\alpha t}\left(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t\right)$$

fra det karakteristiske polynomet og så bruke initialkravene for å finne $A=1$ og $B=(1+\alpha)/\omega_0$, må vi vel konkludere med at laplacetransform i dette tilfellet var fullstendig underlegent gamlemåten dersom målet var å finne $x(t)$. Men merk at veien frem til

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

var veldig kort. Poenget med laplacetransformen er ikke egentlig å finne x, men derimot å finne X og så melke denne for informasjon. En trent ingeniør gidder sjelden finne x. Poenget med disse oppgavene er bare at du skal skjønne at at en bestemt X leder til en bestemt x.

21 Vi får

$$s^2X(s)+sX(s)+X(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

slik at

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}.$$

Denne kommer til å bli enda verre enn den forrige; vi må delbrøksoppspalte noe ut av det hinsidige. Det er mye enklere å finne homogen og partikulær. Den homogene løsningen er

$$x_h(t)=e^{\alpha t}\left(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t\right),$$

mens den partikulære kan vi relativt enkelt finne ved å skrive

$$\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$$

slik at

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2}\left(H(i)e^{it} + H(-i)e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i}e^{it} + \frac{1}{-i}e^{-it}\right) \\ &= \sin t \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} x(t) =& x_h(t) + x_p(t) \\ =& e^{\alpha t}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right) + \sin t \end{aligned}$$

Kravet $x(0) = 0$ gir nå $A = 0$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir $\omega_0 B + 1 = 0$, slik at

$$x(t) = \sin t - \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$\boxed{24}$ Denne likner på den forrige, vi kjører samme strategi:

$$\begin{aligned} x(t) =& x_h(t) + x_p(t) \\ =& e^{\alpha t}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right) + H(i\omega)e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Konstantene A og B kan du regne ut om du orker.

$\boxed{25}$ Denne er litt artig, men vi trenger å smake på et laplacetriks, nemlig **konvolusjonsregelen**. Dersom $Z = XY$, er

$$z(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)\,du.$$

Vi får nemlig

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) =& \int_0^t \cos(u)\cos(t-u)\,dt \\ =& \frac{1}{4}\int_0^t \left(e^{iu} + e^{-iu}\right)\left(e^{i(t-u)} - e^{-i(t-u)}\right)\,dt \\ =& \frac{1}{4}\int_0^t e^{it} + e^{-it} + e^{i(t-2u)} - e^{-i(t-2u)}\,dt \\ =& \int_0^t \cos t + \cos(t-2u)\,dt \\ =& t\cos t + \sin t \end{aligned}$$

Konvolusjon er viktig, men fremstår som snodig i begynnelsen. Vi kommer tilbake til det.

$\boxed{26}$ Denne er også litt artig. Vi får

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Siden

$$-\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

gir neste oppgave oss at

$$x(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

Dette er den homogene og den partikulære løsningen, men det er ikke innlysende at man skal gjette på partikulærløsningen te^{-t} når det drivende leddet er en homogen løsning. Så her var laplacetransform helt klart til hjelp.

$\boxed{27}$ Vi ganger likningen

$$y(t) = tx(t)$$

med e^{-st} og får

$$y(t)e^{-st} = tx(t)e^{-st} = -\frac{d}{ds}x(t)e^{-st}$$

og integrerer fra 0 til ∞, slik at

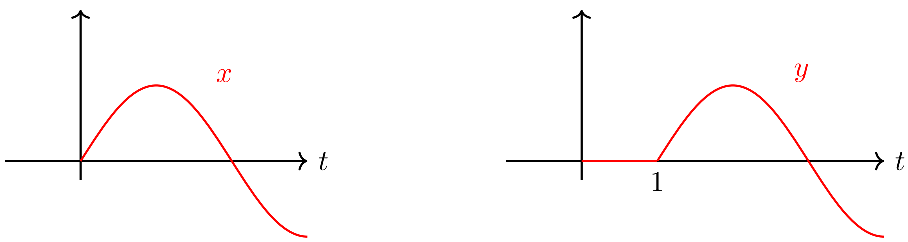
$$Y(s) = \int_0^\infty tx(t)e^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}X(s).$$

$\boxed{29}$ Vi beregner

$$\int_0^\infty u(t-a)e^{-st}\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

og

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty u(t-a)x(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_a^\infty x(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty x(t)e^{-s(t+a)}\,dt \\ &= e^{-as}\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt = e^{-as}X(s) \end{aligned}$$



På oppgave 4-6 får vi henholdsvis

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+s+1)} = e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right)$$

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+s+1)} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-s}}{s(s^2+s+1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s^2+s+1)} \\ &= e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right) - e^{-2s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right) \\ &= \left(e^{-s} - e^{-2s}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right) \end{aligned}$$

som gir t-skiftede superposisjoner av $x_p(t) = 1$ og løsningen fra oppgave 20. I oppgave 7 får vi

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} + \frac{e^{-s}}{s(s^2+s+1)}$$

som vi også ser er en superposisjon av løsningene på oppgave 4 og 20. Superposisjonsprinsippet er jammen greit å vite om.

$\boxed{31}$ Lett!

$$Y(s) = \int_0^\infty x(t)e^{at}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty x(t)e^{-s(t-a)}\,dt = X(s-a)$$

$\boxed{32}$ Regelen over gir umiddelbart at transformene blir

$$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

Jeg vet ikke om det er helt riktig å si at oppgave 20 blir enklere, men vi kan ihvertfall gjøre den på en komplisert med litt annerledes måte. Vi skriver

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+1}{s^2+s+1} \\ &= \frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

og ser nå lett at

$$x(t) = e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Med litt trening, kan det tenkes at dette går kjappere enn å bare skrive opp den homogene løsningen og så bruke initialkravene. Du kan jo ta tiden på deg selv og se. Send meg en epost om du finner ut noe interessant.

$\boxed{33}$ Vi får

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(x-s)\, ds = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\int_0^k f(s)\, ds = f(x).$$

$\boxed{34}$ Dersom pulsen går på i $t = a$ er $X(s) = e^{-as}$.

$\boxed{35}$ Vi regner i vei, og får

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

slik at

$$x(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}.$$

$\boxed{36}$ og ditto:

$$x(t) = u(t-2)e^{-(t-2)}.$$

$\boxed{37}$ og superposisjonsprinsippet:

$$x(t) = u(t-1)e^{-(t-1)} - u(t-2)e^{-(t-2)}.$$

$\boxed{38}$ Hvis du vil løse med laplace, blir transformen

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2+s+1} \\ &= \frac{e^{-s}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) e^{-s} \end{aligned}$$

som gir

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{-(t-1)/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)\right) u(t-1),$$

altså løsningen til

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \qquad x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 1$$

men flyttet et knepp til høyre på t-aksen. Det finnes en annen måte å gjøre det på, se oppgave 39 og 40.

$\boxed{39\text{-}40}$ Her kommer et eksempel på et tilfelle der laplacetransform gjør analysen fryktelig mye enklere. Begge problemene i oppgaven har laplacetransform

$$X(s) = \frac{m(v_0 + sx_0) + bx_0 + 1}{ms^2 + bs + k}$$

der det siste ett-tallet kommer fra deltapulsen i det ene tilfellet, og fra tillegget $1/m$ i initialfarten i det andre. Dette betyr at vi kan tolke deltapulsen som noe som momentant tilfører bevegelsesmengden 1 til bevegelsen. (Husk at bevegelsesmengde er mv.)