# 2 - 13 - SKJELETTENE I SKAPET

I et kurs i matematikk for ikkematematikere, må vi koste mange tekniske detaljer under teppet. Grunnen er enkel. Dersom du har fulgt med til nå, har du litt peiling på differensiallikninger, lineæralgebra, fourieranalyse og kvantefysikk. Men prisen vi betaler for å studere så mye forskjellig, er at alt som heter stringens hives på havet. Jeg har fått mye kjeft av John Aslak det siste året. Nå skal vi avslutte første studieår med en titt på ymse ting han har kjefta på meg for.

Det første er bruken av ordet "vis". Når du viste at en innbyrdes ortogonal vektormengde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\cdots$, $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengig så lenge det er et endelig antall vektorer og ingen av dem er nullvektoren, tok du indreproduktet av likningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

med $\mathbf{v}_k$, og fikk

$$(c_1\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k) + (c_2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k) + \cdots + (c_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_k) = (\mathbf{0}, \mathbf{v}_k). \tag{2}$$

Hvis du nå vet at $(\mathbf{0}, \mathbf{v}_k) = 0$ og bruker lineariteten på venstre side, får du

$$c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k) + \cdots + c_n(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_k) = 0 \tag{3}$$

og bruker du ortogonaliteten, får du

$$c_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = 0. \tag{4}$$

Hvis du nå til slutt vet at $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) \neq 0$ så lenge $\mathbf{v}_k$ ikke er nullvektoren, kan du slutte at $c_k = 0$, og dersom du gjentar dette resonnementet for alle $k$, vet du at $c_k = 0$ for alle $k$, og da vet du at vektorene er lineært uavhengige. Dette ville nok de fleste matematikere gå med på som et noenlunde stringent bevis. [1]

Problemene starter i det vi begynner å si sånne ting som at funksjoner på intervallet $[-T/2, T/2]$ er ortogonale. I resonnementet over trengte vi å vite at $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) \neq 0$ dersom $\mathbf{v}_k$ ikke er nullvektoren. Dette kan i noen tilfeller være diskutabelt. La oss begynne med en titt på konseptet areal.

$\boxed{1}$ Finn arealet under grafen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Du syntes sikkert det var en lett oppgave. Hva med denne?

$\boxed{2}$ Finn arealet under grafen til funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

[1] Vi har riktignok brukt noen småting som følger av vektorromsaksiomene, sånn som at $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, men det er det antagelig ingen som husker, for det var i forrige semester og jeg plaget deg ikke så mye med slikt det semesteret.

Oppgavene over var designet slik at det skulle være litt vanskelig å se forskjell på dem. Begge ber deg finne areaelet til et kvadrat med sidekant 1. Den eneste forskjellen er funksjonsverdien i $x = 0$. Vi kan vel være enige om at dette ikke bør ha noe å si for arealet, og det har det ikke heller. Spørsmålet er om vi skal tenke $f$ og $g$ som "samme" funksjon, til tross for at de er forskjellige i ett enkelt punkt. For slike tilfeller finnes det et navn; vi sier at $f$ og $g$ er like **nesten overalt**.[2]

Nå kan vi se på et problem med indreproduktets andre aksiom:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

Det er et viktig poeng at indreproduktet ikke skal kunne være null med mindre du putter inn nullvektoren; dette trengte vi å vite i resonnementet om ortogonalitet og lineær uavhengighet. Men dersom vi er enige i at arealet under både $f$ og $g$ er 1, er

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 g(x)\, dx = 1 - 1 = 0$$

selv om $f - g$ ikke er nullfunksjonen:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Med andre ord er det litt fishy å påstå at

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

er et indreprodukt uten å si noe mer om $f$ og $g$. Og skal vi si slikt som at dersom

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt \qquad \text{er} \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

må vi nesten ta stilling til at dersom to signaler er like bortsett fra i ett enkelt punkt, har de samme fourieromvending, og det er umulig for oss å vite hvilket av dem som kommer ut av rekonstruksjonen.

$\boxed{3}$ Kan du finne flere problematiske eksempler?

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Almost_everywhere

Det finnes nå to klassiske strategier for å ro seg trygt i land fra disse problemene:

C: **alltid** legge strenge restriksjoner på hvilke funksjoner man får lov til å herje med

L: ikke bry seg så mye om at funksjoner er forskjellige i enkeltpunkter

Jeg har kalt den første strategien for "C" etter Augustin Louis Cauchy, oppfinneren av begrepet **kontinuerlig funksjon**. [3] Velger man denne strategien, tar man den klassiske veien inn i matematisk analyse. Fordelen med er at en matematikkstudent kan få oppleve stringent oppbygning av matematikk relativt tidlig i studiet. Ulempen for en ingeniør er at man i anvendelser fort begynner å bryte de nødvendige restriksjonene veldig fort, og da forsvinner jo hele poenget med stringens, og ingen skjønner hva de skal med det. At noe så enkelt som firkantpulsen

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

er inversomvendingen til sincfunksjonen

$$\hat{x}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

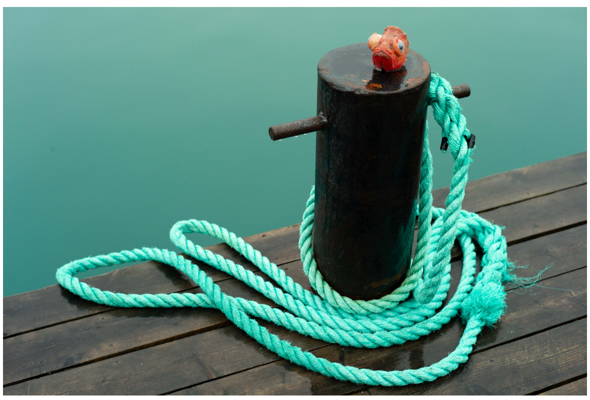
kan vi bare glemme å vite med hundre prosent sikkerhet. Det kunne jo like gjerne vært

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

eller

$$z(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \\ 187 & t = 1 \\ 42 & t = -1 \end{cases}$$

Den andre strategien ligger i bånn for noe som kalles **målteori**, oppfunnet av Henri Lebesgue tidlig i det tjuende århundret. I grove trekk bygger man alt på **ekvivalensklasser av funksjoner** istedet for funksjoner; for eksempel er signalene $x$, $y$ og $z$ over i samme ekvivalensklasse siden de bare er forskjellige i enkeltpunkter. Fordelen med denne strategien at du kan herje ganske fritt, men ulempen er at det er altfor abstrakt for oss.[4]




[3] Jeg trodde lenge at han oppfant $\epsilon$-$\delta$-resonnementet, men det var visst Bernhard Bolzano.
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_(mathematics)

Det er i bunn og grunn ikke noen vits i å prøve å lage en stringent oppbygning av matematikken i et ingeniøremne, for det er bare John Aslak og et par andre som ville skjønt noe av det eller synes det var interessant. Men det kan være greit å ta en liten titt på hvilke skjeletter vi har gjemt i skapet til nå, for mange av dere kommer til å støte på begrepsapparatet på et senere tidspunkt.

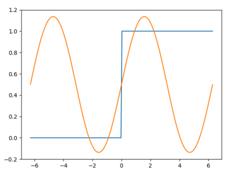
Det vi skal gjøre, er å pløye oss gjennom en klassisk matryosjka av funksjonsklasser. Mennesker elsker å kategorisere, og vi har selvfølgelig kategorisert funksjonene. Den ytterste matryoskjaen heter bare funksjon. Den innafor der igjen heter **kontinuerlig funksjon**. Det finnes to klassiske strategier for å definere kontinuerlig funksjon. Den første er å gå rett på. Vi sier at en funksjon er kontinuerlig i punktet $x_0$ dersom for det for en hver $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$\|x_0 - x\| < \delta \qquad \implies \qquad \|f(x_0) - f(x)\| < \epsilon \tag{5}$$

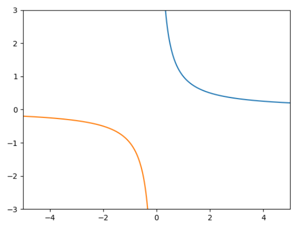
for alle $x$ i nærheten av $x_0$. En funksjon er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig overalt definisjonsområdet sitt. [5] Denne definisjonen er fryktet og hatet av titusenvis av NTH-studenter opp gjennom tidene, men det finnes heldigvis et spesialtilfelle som er lett å huske:

*En funksjon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig hvis og bare hvis du kan tegne den fra $a$ til $b$ uten å løfte blyanten fra papiret.*

$\boxed{4}$ Hvilken funksjon er kontinuerlig, den oransje eller blå? Se nøye på definisjonen. (Denne oppgaven illustrerer hvorfor du aldri skal tegne en vertikal linje der en diskontinuerlig funksjon har et sprang.)




En ting som kan være litt forvirrende i starten, er spørsmålet hvorvidt $1/x$ er en kontinuerlig funksjon. Dette illustrerer at man må spesifisere definisjonsmengden før man kan avgjøre om en funksjon er kontinuerlig. Grenseverdien




$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

eksisterer ikke og $1/x$ er ikke definert i origo, så den er definitivt ikke kontinuerlig i origo. [6] Men $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

*er* kontinuerlig. Det som skaper forvirring her er at den største mulige definisjonsmengden til $1/x$ (altså alle reelle tall unntatt null) er punktert i origo. Kontinuitet er en lokal egenskap, og den korresponderer ikke kjempegodt til det mentale bildet en typisk ikkematematiker vil ha av en graf som kan tegnes uten å løfte pennen fra papiret, med mindre definisjonsmengden er et lukket intervall. Derfor er det tryggest når definisjonsmegnden er et lukket intervall. I en typisk analysebok er det mye mas om noe som kalles kompakte mengder. Dette er en generalisering av lukket og begrenset intervall, og alt for komplisert for oss.[7]

[5] Jeg har skrevet $\|\cdot\|$, fordi denne definisjonen funker fint i alle dimensjoner.
[6] Merk at $f$ må være definert i $x$ for å være kontinuerlig i $x$.
[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space`

En alternativ strategi er å først definere grenseverdi. En funksjon $f$ sies å ha grenseverdien $L$ i $x_0$ dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x_0 - x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

En funksjon $f$ er kontinuerlig i $x_0$ dersom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Disse to definisjonene av kontinuerlig funksjon er ekvivalente. Jeg har skrevet opp begge, for noen bøker bruker den ene og noen den andre. Dette kan være forvirrende i starten. Sjekk ut studass Kallands geniale javascript med røde og grønne fargekoder her:
`https://tma41x1.math.ntnu.no/12/epsilon-delta/`

$\boxed{5}$ Sett $x_0 = 0.5$ i studass Kallands javascript og merk deg hvordan du ikke klarer å få linjene til å bli grønne uansett hvor mye du prøver.

$\boxed{6}$ Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuerlig uansett hva $c$ er.

$\boxed{7}$ Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Får du til oppgave under, vil du kanskje se at dersom jeg hadde bedt deg sjekke at

$$\int_0^1 f(x) g(x) \, dx$$

er det et indreprodukt så lenge $f$ og $g$ er kontinuerlige på $[0, 1]$, hadde vi vært på trygg grunn.

$\boxed{8}$ $$z(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \\ 187 & t = 1 \\ 42 & t = -1 \end{cases}$$ Kontinuerlig?

Hvis du synes dette er teknisk og uforståelig, kan jeg trøste deg med at Isaac Newton klarte å finne opp både derivasjon og integrasjon uten å ha en presis ide om hverken reelle tall eller grenseverdier, så det fullt mulig å hoppe over hele denne undervisningsuken og allikevel opparbeide en helt grei arbeidskunnskap om kalkulus. Men dette er et kurs i matematikk, så vi må nesten se litt på det. Fordelen med å forstå grenseverdi er at vi kan definere stigningstall.

En funksjon $f$ er **deriverbar** i $x$ dersom

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer.

$\boxed{11}$ Forklar at en deriverbar funksjon må være kontinuerlig.

$\boxed{12}$ Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ikke er deriverbar i $x = 0$.

$\boxed{13}$ Forklar at $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

ikke er deriverbar i $x = 0$.

En merkelig fun fact er at en funksjon kan være deriverbar til tross for at den deriverte ikke er en kontinuerlig funksjon.

$\boxed{14}$ Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$. Er $f'$ kontinuerlig i $x = 0$?

Derav følgende definisjon.

- En funksjon $f$ er $n$ **ganger deriverbar** i $x$ dersom den $n$-te deriverte eksisterer i $x$.
- Dersom den $n$-te deriverte er en kontinuerlig funksjon, sier vi at $f$ er $n$ **ganger kontinuerlig deriverbar**, og vi skriver $f \in \mathcal{C}^n$.
- Dersom $f$ kan deriveres uendelig mange ganger uten å støte på noen problemer,sier vi at $f$ er **glatt**, og skriver $f \in \mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{15}$ La

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Er $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$? $\quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? $\quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$?

Dette var nesten hele matryosjkaen. Den siste og innerste innerste heter **analytisk funksjon**, og består av funksjoner som kan skrives som en taylorrekke:

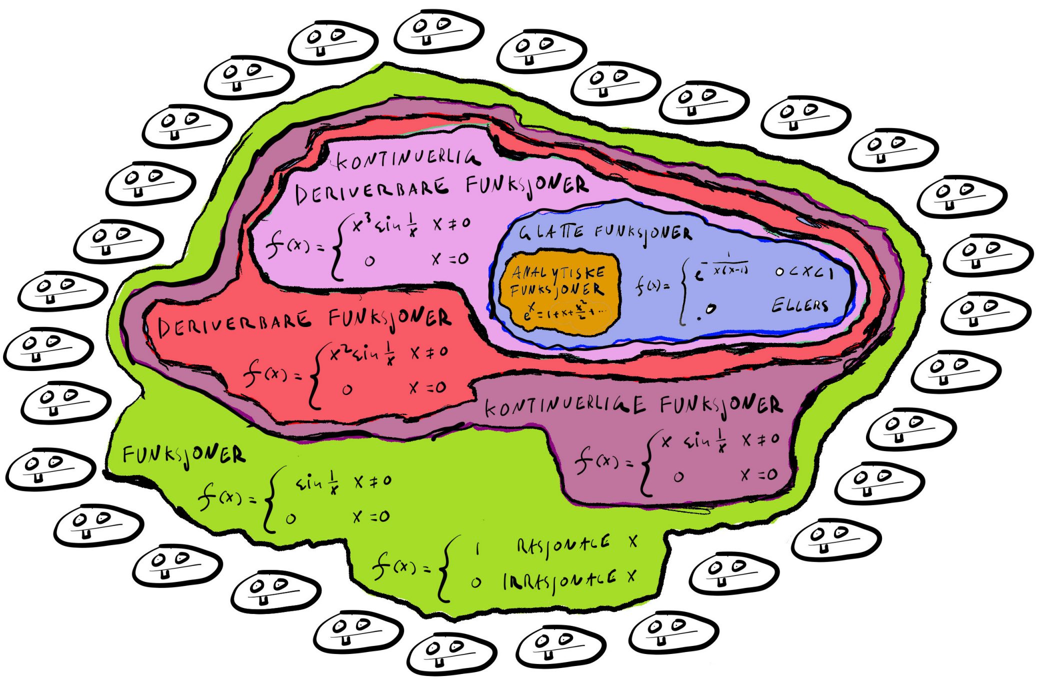
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Det bør være rimelig åpenbart at en funksjon må være $\mathcal{C}^\infty$ for å være analytisk. Men det motsatte er ikke sant. Det finnes glatte funksjoner som ikke kan skrives som en taylorrekke, for eksempel **hufsafunksjonen**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x)(1+x)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Du finner et eksempel på en liknende funksjon her:
`https://tma41x1.math.ntnu.no/12/grafer/`

$\boxed{16}$ Forklar at hufsafunksjonen er glatt med ikke analytisk.



Vi nærmer oss veis ende - her er semesterets siste side. Vi skulle gjerne hatt en formel for invers laplacetransform. Vi vet at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

og for signaler som har fourieromvending, er denne helt fin. Men hva med

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases} \qquad ?$$

Denne kan laplaceomvendes, men ikke fourieromvendes. Finnes det en formel slik at

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \quad ?$$

Vi kan ikke bare skrive

$$\sin t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

for dette integralet konvergerer ikke. Derfor kompleks analyse.[8] Vi skriver

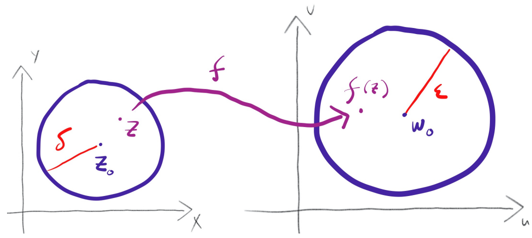
$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

der $z = x + yi$ er den uavhengige variabelen, og $w = u + iv$ er den avhengig variabel. Merk at $u$ og $v$ er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Nå er vi over i en del av matematikken som av mange matematikere betraktes mer som som en form for kunst enn en form for vitenskap. Det er ikke så lett å visualisere komplekse funksjoner, så man må samle på fun facts. Definisjonen av grenseverdi er identisk med definisjonen for reelle funksjoner. Vi sier at

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - w_0| < \epsilon$$




Vi sier videre at $f$ er **deriverbar** i $z$ dersom

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. På noen måter fungerer denne definisjonen akkurat som den du er vant til.

$\boxed{17}$ Vis at $\frac{d}{dz}z^2 = 2z$ og at $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

Men likheten slutter her, siden det komplekse tallet $h$ må kunne reise inn mot $z$ på vilkårlig vis.

$\boxed{18}$ Bruk dette til å finne frem til **Cauchy-Riemannlikningene**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En funksjon av en kompleks variabel oppfører seg fundamentalt annerledes enn en funksjon av en reell variabel. Det finnes for eksempel ingenting mellom deriverbar og analytisk funksjon! Dette skal vi se på til høsten.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_analysis

# UKENS NØTTER

I den klassiske mekanikkens åndelige sentrum sitter differensialoperatoren:

$$T(x) = \dot{x}$$

Den er en lineæroperator. Men hvordan vet vi egentlig det? Følgende oppgaver forteller det det sånn omtrent.

$\boxed{1}$ Vis at en grenseverdi er entydig dersom den eksisterer.

$\boxed{2}$ Vis at dersom

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2$$

er

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) + f_2(x) = L_1 + L_2$$

$\boxed{3}$ Vis at dersom $a$ er en konstant og

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

er

$$\lim_{x \to x_0} af(x) = aL$$

$\boxed{4}$ Vis at differensialoperatoren er lineær.

Det finnes ellers en liten nisje mellom mellom kontinuerlige og deriverbare funksjoner som er slik at sekanten aldri er brattere enn som så. Dette kalles **lipschitzkontinuitet**, og dukker opp her og der i anvendelser. En funksjon er lipschitzkontinuerlig dersom det finnes et tall $c$ slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

for alle $x, y$. Kjennere sier bare "lipschitz" istedet for "lipschitzkontinuerlig".

$\boxed{5}$ Er kvadratrotfunksjonen lipschitz?

$\boxed{6}$ Er sinc-funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

kontinuerlig? Deriverbar? Kontinuerlig deriverbar? Lipschitz?
(Hint: vi har i TMA4101 funnet grenseverdien $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.)