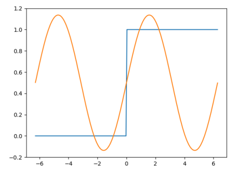
2 - 13 - SKJELETTENE I SKAPET - LF

$\boxed{1}$ Det er 1.

$\boxed{2}$ Også 1!

$\boxed{4}$ Den oransje funksjonen er kontinuerlig, men ikke den blå. Fy skam python, her burde du ikke tegnet den vertikale linjen. Funksjonen skal hoppe opp! Argh.



$\boxed{6}$ Grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

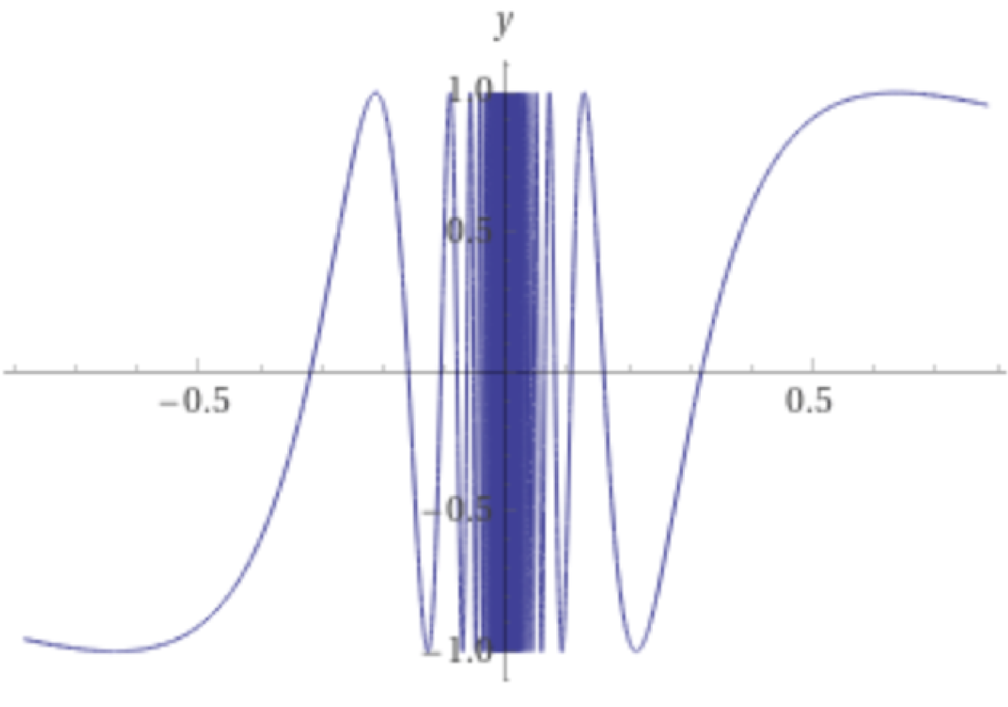
eksisterer ikke. Siden $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

og $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$, ser vi at dersom du står i $x = a$ og lar $x \to 0$ vil $\sin\frac{1}{x}$ ha uendelig mange oscillasjoner mellom a og 0, uansett hvor liten a er. Så konklusjonen er at dersom du har en kandidat for grenseverdi L, og velger $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ som du tror gjør jobben, vil $|\sin\frac{1}{x} - L| > 1 - |L|$ for en eller annen $|x| < \delta$, og L er altså ikke en grenseverdi allikevel.



$\boxed{7}$ Min påstand er at

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Velg $\epsilon > 0$. Siden sinusfunksjonen alltid er mindre enn én i absoluttverdi, kan vi sette opp ulikheten

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|\,.$$

Hvis vi velger $\delta = \epsilon$ og krever at $|x| < \delta$, vil

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

og derfor er grenseverdien 0. Med andre ord har vi at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

og følgelig er f kontinuerlig i $x = 0$.

$\boxed{8}$ Nei, grenseverdiene eksisterer ikke i $t = \pm 1$.

$\boxed{11}$ Dersom brøken

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

skal ha en grenseverdi når $h \to 0$, må

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

som er det samme som å si at f må være kontinuerlig i x.

$\boxed{12}$ Vi beregner

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(1/h)$$

Denne eksisterer ikke, så f er ikke deriverbar i $x = 0$.

$\boxed{13}$ Samme her,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

$\boxed{14}$ Vi beregner

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(1/h) = 0$$

så f er deriverbar i $x = 0$. Men om vi deriverer f, får vi

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

som ikke er kontinuerlig i $x = 0$, siden

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ikke eksisterer.

$\boxed{15}$ La

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen er $\mathcal{C}^1$, for den deriverte

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er en kontinuerlig funksjon. Det er også greit å sjekke at den dobbelderiverte eksisterer i $x = 0$, så f er to ganger kontinuerlig deriverbar. Men om du deriverer f', får du en funksjon som ikke har grenseverdi inn mot $x = 0$, så $f \notin \mathcal{C}^2$.

$\boxed{16}$ Dette skal vi komme tilbake til litt senere når vi har sett på konseptet konvergensradius.

$\boxed{17}$ Vi beregner på samme vis som i det reelle tilfellet:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2zh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2z + h = 2z$$

For å derivere sinusfunksjonen må vi først finne ut litt mer om sinusfunksjonen. Ifølge Leonard Euler er

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Dette gir

$$\cos i\theta = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh\theta \qquad \text{og} \qquad \sin i\theta = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = i\sinh\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + yi) \\ &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + yi) \\ &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sin y \end{aligned}$$

La $u(x, y) = \sin x \cosh y$ og $v(x, y) = \cos x \sinh y$. Nå kan vi bruke neste oppgave og beregne

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cosh y - i \sin x \sin y = \cos z.$$

$\boxed{18}$ La h reise mot $z = x + yi$ langs $h(t) = t$ (der $t \in \mathbb{R}$), altså en rett linje parallell med realaksen. Vi beregner

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x+t, y) + iv(x+t, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

vi gjenta så eksperimentet med den rette linjen $h(t) = it$, slik at vi reiser inn i z parallelt med imaginæraksen.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(x, y+t) + iv(x, y+t) - u(x, y) - iv(x, y)}{it} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + \lim_{t\to 0} \frac{iv(x, y+t) - iv(x, y)}{it} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

De to uttrykkene for f' må være identiske hvis $f'(z)$ skal eksistere, og da må real- og imaginærdelene være like. Dette kalles Cauchy-Riemann-likningene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$