2 - 10 - FOURIEROMVENDING - LF

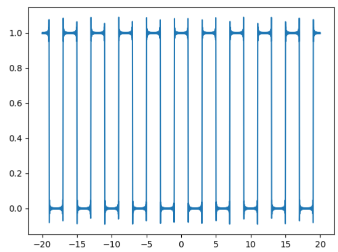
$\boxed{1}$ La $T > 2$. Vi beregner

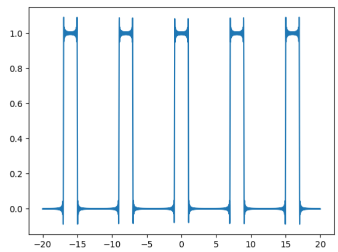
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{in\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} e^{in\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{in\omega T}\left(e^{in\omega} - e^{-in\omega}\right) = \frac{2}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \end{aligned}$$

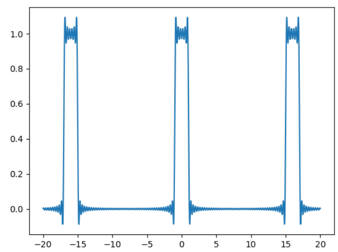
og $c_0 = 2/T$. Vi setter så sammen rekken, og får

$$\begin{aligned} y(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n\omega)}{n\omega}e^{in\omega t} + \frac{\sin(-n\omega)}{(-n\omega)}e^{-in\omega t}\right)\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n\omega)}{n\omega}e^{in\omega t} + \frac{\sin(n\omega)}{n\omega}e^{-in\omega t}\right)\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega)}{n\omega}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right)\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega)}{n\omega}\cos(n\omega t)\right) \end{aligned}$$

Under er plot av en partialsum med de hundre første leddene for T lik 4, 8, og 16.







$\boxed{9}$ Vi beregner:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \frac{-1}{i\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right) = \frac{2\sin\omega}{\omega}
\end{aligned}
$$

Denne kalles sinc-funksjonen og er veldig viktig i elektroteknikk. Merk likheten med fourierkoeffisientene fra forrige oppgave

$$
\frac{2}{T}\cdot\frac{\sin\left(n\omega_0\right)}{n\omega_0}
$$

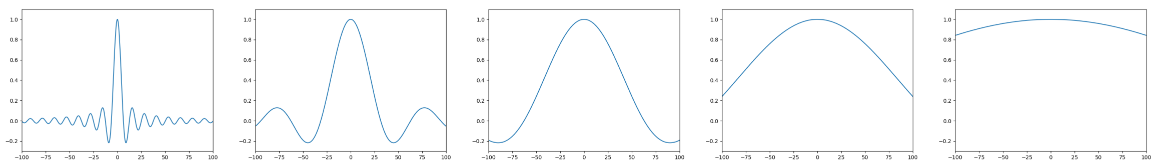
der jeg har bytta navn fra ω til ω_0 for å poengtere at det at periodisk signal har en grunnfrekvens ω_0 og så dekompononeres signalet i heltallsmultipler av denne. I fouriertransform gir ikke konseptet "grunnfrekvens" noen mening lenger, for når signalet ikke er periodisk, må man fort ha alle frekvenser på den reelle aksen for å rekonstruere signalet:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{i\omega t}\,dt
\end{aligned}
$$

$\boxed{10}$ Denne blir ikke helt ulik den forrige:

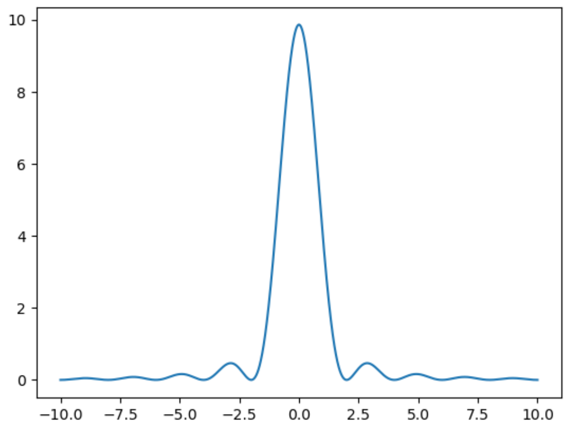
$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1/2a}^{1/2a} a e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \frac{-a}{i\omega}\left(e^{-i\omega/2a} - e^{i\omega/2a}\right) = \frac{\sin\omega/2a}{\omega/2a}
\end{aligned}
$$

Her er plot av denne for a lik 1, 5, 10, 20 og 50. Merk at når $a \to \infty$ går $\hat{x}$ mot 1 overalt. Dette har sammenheng med oppgave 12 under.



$\boxed{11}$ Trekantpulsen er gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \le \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$



Vi beregner

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= 2\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(\omega t)\ dt \\ &= \frac{2}{\omega}\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\ dt \\ &= \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega\pi)\right) \end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Lett!

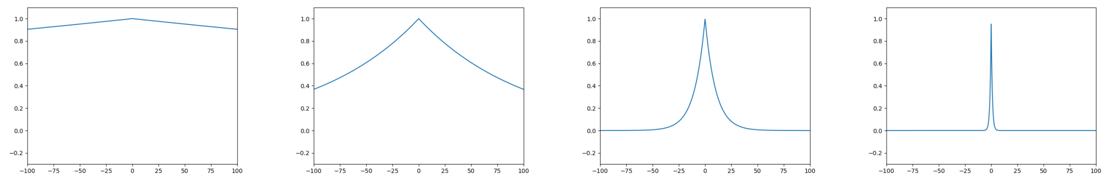
$$\hat{\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\, dt = e^0 = 1$$

Se på oppgave 12 over. Signalet

$$x(t) = \lim_{a\to\infty} \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \ge 1/2a \end{cases}$$

er en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på.

$\boxed{13}$ Denne funksjonen er også en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på. Her er plot for a lik 0.001, 0.01, 0.1 og 1:



$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}\, dt + \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)}e^{(a-i\omega)t}\Big|_{t=-\infty}^{t=0} - \frac{1}{(a+i\omega)}e^{-(a+i\omega)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Dette gir OGSÅ en heuristisk finfin måte å sette opp diracpulsen på når $a \to 0$.

$\boxed{14}$ Her bruker vi et skittent triks som vi ikke egentlig kan bruke. Men vi er ingeniører og eier ikke skam, så det går bra. I forrige oppgave regnet vi ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,dt = = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

og hvis vi skal tro de som har peiling, er følgelig

$$e^{-a|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega$$

Hvis vi bytter fortegn på t og deler på $2a$, får vi

$$\frac{1}{2a}e^{-a|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+\omega^2}e^{-i\omega t}\,d\omega$$

som er det vi er ute etter, bare med variabelnavnene bytter om. For ordens skyld kan vi bytte:

$$\frac{1}{2a}e^{-a|\omega|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+t^2}e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)$$

slik at

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}.$$

$\boxed{15}$ Her kan du bruke oppgave 10 og samme triks.

$\boxed{16}$ Vel, tosidig laplacetransform er

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

slik at

$$X(i\omega) = \hat{x}(\omega)$$

Litt forenklet kan man nok si at i fagfelt der man er opptatt av initialbetingelser (for eksempel regulerings- og prosessteknikk), er det litt skummelt å si at fourier er spesialtilfelle av laplace (fordi regnereglene for derivasjon blir litt forskjellige), men i fagfelt der man ikke er det (kretsanalyse), er det samme greia.

$\boxed{17}$ I denne oppgaven må vi begynne å tenke litt på hva vi fourieromvender. Siden $e^{-i\omega t}$ alltid ligger på enhetssirkelen i det komplekse planet, ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-i\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\cdot|e^{-i\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt.$$

Med andre ord kan vi være sikker på integralet konvergerer dersom $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt$ er et tall og ikke uendelig. Vi sier i dette tilfellet at x er **absolutt integrerbar**, og du kan i bunn og grunn tenke på x som en skalarmultippel av en sannsynlighetsfordeling. Vi kan nå delvisintegrere slik

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= x(t)e^{-i\omega t}\Big|_{t=-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= i\omega\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt = i\omega\hat{x}\end{aligned}$$

siden

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0.$$

$\boxed{18}$ La $y(t) = x(t-\theta)$ Vi tar et trivielt variabelskifte, og beregner

$$\begin{aligned}
\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta)e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(p)e^{-i\omega(p+\theta)}\, dp \\
&= e^{i\omega\theta}\int_{-\infty}^{\infty} x(p)e^{-i\omega p}\, dp = \ e^{-i\omega\theta}\hat{x}(\omega).
\end{aligned}$$

$\boxed{19}$ La $y(t) = e^{i\theta t}x(t)$. Her er det ikke nødvendig med variabelskifte en gang:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}x(t)e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i(\omega-\theta)t}\, dt = \ \hat{x}(\omega-\theta).
\end{aligned}$$

$\boxed{20}$ La $y(t) = x(at)$ og la $a > 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}
\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(p)e^{-i\omega p/a}\, dp = \ \frac{1}{a}\hat{x}(\omega/a).
\end{aligned}$$

La så $y(t) = x(at)$ og la $a < 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}
\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(p)e^{-i\omega p/a}\, dp \\
&= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(p)e^{-i\omega p/a}\, dp = \ -\frac{1}{a}\hat{x}(\omega/a).
\end{aligned}$$

Alt i alt kan vi skrive dette som

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{x}(\omega/a).$$

$\boxed{21}$ La oss studere funksjonen

$$x(t) = \ e^{-t^2/2}$$

Hele utledningen bygger på to pene faktum. Det første er at

$$\dot{x}(t) = \ -te^{-t^2/2}$$

og det andre er at

$$\frac{d}{d\omega}x(t)e^{-i\omega t} = \ -ite^{-t^2/2}e^{-i\omega t}$$

som tilsammen gir

$$i\omega\widehat{x}(\omega) = \widehat{\dot{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -te^{-t^2/2}e^{-i\omega t}\,dt = -i\frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega)$$

eller

$$\omega\widehat{x}(\omega) + \frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega) = 0.$$

Som alle barn i barnehagen vet, kan en differensiallikning ofte løses ved å herje litt og integrere. I dette tilfellet er herjingen å gange med $e^{\omega^2/2}$:

$$e^{\omega^2/2}\omega\widehat{x}(\omega) + e^{\omega^2/2}\frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega) = 0,$$

for da ser vi at dette er bare likningen

$$\frac{d}{d\omega}\left(e^{\omega^2/2}\widehat{x}(\omega)\right) = 0,$$

som integrerer til

$$e^{\omega^2/2}\widehat{x}(\omega) = c,$$

eller

$$\widehat{x}(\omega) = ce^{-\omega^2/2}.$$

Konstanten c kan vi bestemme ved å evaluere likningen i $\omega = 0$:

$$c = \widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

Det siste integralet skal vi som sagt komme tilbake til neste semester. Konklusjonen er at

$$\widehat{x}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2},$$

og siden fourieromvending er en lineæroperator, er fourieromvendingen til standardnormalfordelingen $e^{-\omega^2/2}$, enkelt og greit.

Standardnormalfordelingens karakteristiske funksjon er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{i\omega t}\,dt$$

Men dette kjenner vi igjen som inversomvendingen til det vi nettopp regna ut. Vi vet jo at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2}e^{i\omega t}\,d\omega$$

eller

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2}e^{i\omega t}\,d\omega$$

og høyresiden er nettopp det vi er ute etter, bare med feil variabelnavn. Konklusjonen er at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{i\omega t}\,dt = e^{-\omega^2/2}.$$

Hvis du ikke liker at jeg bruker inversomvendingen så fritt, kan du prøve kopiere resonnementet vi brukte for å regne ut fourieromvendingen til standardnormalfordelingen; det er bare en minus her og der som blir forskjellig.