1 - 9 - POTENSREKKER

Jeg har en rønne på et nes helt nord i Nordland. Neset ligger på grensen mellom Øksnes og Bø[1] og heter Revneset. [2] Det er hverken vei, vann, strøm eller kai der. Alt ruster, og det best å ikke skade seg eller gjøre noe dumt. Tre dyre kameraer har endt sine dager i fjæra på Revneset.

En påske satt jeg på Revneset og var til nødt til å finne vinkelen på taket, og hadde ikke tilgang på kalkulator med de inverse trigonometriske funksjonene.

$\boxed{1}$ Jeg estimerte den ene kateten til å være 15 og den andre til 19. Finn takvinkelen på en kalkulator uten arctanknapp.

[1] Også kalt "Norges Monaco"

[2] Uttales "Rævneset". Jeg prøvde lenge å si "Revneset" men fikk så hatten passet av de lokale, og måtte til slutt krype til korset og justere uttalen.

Skal man finne en vinkel fra to kateter uten arctanknapp, er det nyttig å vite at

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Denne typen formel kalles en **potensrekkeutvikling**, og ble oppdaget av Isaac Newton. Newton måtte regne ut alt med blyant og papir, så det trengs ikke mye fantasi til for å skjønne at en slik formel kan være gull verdt på en øde øy. [3]

Hvor i all verden kommer denne formelen fra? Det finnes faktisk liknende formler for de fleste funksjoner du kjenner til; for eksempel er eksponensialfunksjonen gitt ved

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La oss se litt på denne. Du synes sikkert dette var rart. Rare formler trenger rare utledninger. Her er analysens fundamentalteorem på eksponensialfunksjonen, skrevet på en rar måte:

$$e^x = 1 + \int_0^x e^s \, ds$$

$\boxed{2}$ Nå tar du en delvis integrasjon på integralet på høyre side. Men ikke slik du er vant til. Du skal la $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = x - s$ slik at $v'(s) = -1$. Ikke tenk, bare gjør som jeg sier. Om du gjør det riktig, skal du ende opp med likningen

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x - s) e^s \, ds.$$

[3]Etter å ha regnet ut arcustangens til $15/19$ på denne måten på telefonen og blitt veldig fornøyd med meg selv, oppdaget jeg at at man på Iphone 5 får tilgang på arctanknappen ved å legge telefonen over på siden.

$\boxed{3}$ Gjenta prosessen, men nå med $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{2}(x-s)^2$ slik at $v'(s) = -(x-s)$. Holder du tungen beint i munnen, skal du ende opp med

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^s \, ds.$$

$\boxed{4}$ Bruk induksjon til å fortsette prosessen, og utlede at

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds.$$

Uttrykket

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

kalles det n**-te ordens taylorpolynomet** til eksponensialfunksjonen. Disse utgjør en familie av polynomer som approksimerer funksjonen.

$\boxed{5}$ Plott eksponensialfunksjonen og noen av taylorpolynomene i samme figur.

Jo høyere n desto bedre approksimasjon. Hvor god er den egentlig? La oss tenke at du sitter på en øde øy uten kalkulator og lurer på verdien til eulertallet $e \approx 2.71828182845904523536\cdots$.

$\boxed{6}$ Bruk taylorpolynomet til å approksimere e. Hvor mange ledd må du ha med for å få med alle desimalene over?
(Du får lov til å bruke python.)

Formelen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^{n+1} e^s \, ds$$

kan generaliseres på to forskjellige måter. For det første kan f være en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon, og for det andre trenger ikke den nedre integrasjonsgrensen i integralet være null. **Taylors teorem** sier at dersom f er en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x, er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s) \, ds$$

Dette kan du tenke på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, og det kan utledes på samme måte vi gjorde for eksponensialfunksjonen, men jeg skal ikke plage deg med det. Symbolet $f^{(n)}$ betyr den n-te deriverte til f, mens x^n betyr den vanlige n-te potensen til x. Dette kan være litt forvirrende i starten.

$\boxed{7}$ Denne formelen tror jeg nesten jeg kan garantere at du får bruk for, også i andre fag. Du kan like gjerne skrive den ned et par ganger. Bruk blyant og papir.

Det siste integralleddet kalles gjerne **feilen**. Tar vi vekk denne, står vi igjen med

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Uttrykket på høyresiden kalles f sitt **taylorpolynom om av orden** n **om punktet** a. Dersom $a = 0$ kalles det **maclaurinpolynom istedet**.

$\boxed{8}$ FInn maclaurinpolynomene til sinusfunksjonen og cosinusfunksjonen.
(Hint: Se Arnes bok kap. 6.3.)

På forrige side skrev jeg opp Taylors teorem med feilledd på integralform, fordi det er dette som detter ut når du tar utgangspunkt i analysens fundamentalteorem og delvisintegrerer igjen og igjen. Men det finnes en alternativ form. Under de samme forutsetningene på f finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Akkurat som den første varianten kan tenkes på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, kan denne varianten tenkes på som en generalisering av sekantsetningen.[4] De to variantene er nesten ekvivalente; forskjellen mellom dem er formen på feilleddet. Kravet om at f er $n+1$ ganger deriverbar kan slakkes i den første versjonen, men dette er litt for teknisk til at jeg vil plage deg med det. Nå begynner det å bli mulig å forklare hvorfor Newtons metode konvergerer kjappere enn fikspunktiterasjonen.

$\boxed{9}$ Bruk Taylors teorem $n = 0$ til å vise at for fikspunktiterasjonen finnes det, dersom g er deriverbar, en s slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r)$$

$\boxed{10}$ Studer konsekvensene av likningen i forrige oppgave. Ta stilling til om du synes det er en fornuftig påstand at fikspunktiterasjonen kan tenkes å konvergere dersom $|g'| < 1$. Kan det tenkes at fikspunktiterasjonen konvergerer raskt om $|g'|$ veldig liten?

Ok, nå blir det sikkert litt forvirrende. Newtons metode er faktisk en fikspunktiterasjon;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

Vanlig fikspunkt har **lineær konvergens**, mens Newton har **kvadratisk konvergens**.

$\boxed{11}$ Bruk Taylors teorem med $n = 1$ til å vise at det (dersom $f'(r) \neq 0$) finnes en s slik at

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2.$$

[4]Merk at for $n = 0$ er dette bare sekantsetningen: `https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem`

Nå skal vi se på hva som skjer dersom $n \to \infty$ i Taylors formler.

$\boxed{12}$ Finn maclaurinpolynomene til

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Vi må selvfølgelig kreve $x \in (-1, 1)$. Ser dette kjent ut?

En generalisering av den geometriske rekken kalles **potensrekke**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

I de fleste tilfeller du kommer til å støte på, er

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

for en eller annen kjent funksjon f. Potensrekken kalles i så fall **taylorrekke**, og dersom $a = 0$ kalles det **maclaurinrekke**. Etter alt du har fiklet med denne økten, kommer det kanskje ikke som noe sjokk at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{og} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{og} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

I motsetning til den geometriske rekken, er disse uttrykkene faktisk gydlige for alle x. Potensrekker kan konvergere for noen verdier av x og divergere for andre, eller konvergere for alle x eller divergere for alle x. Det kommer an på koeffisientene c_n. Mengden av x slik at potensrekken konvergerer kalles **konvergensområdet**. Som regel er forholdstesten en hit her. Finn konvergensområdet til

$\boxed{13}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\boxed{14}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\boxed{15}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\boxed{16}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ $\boxed{17}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(Hint: Se Arnes bok kap. 6.4 for eksempler.)

Hvis du er dreven i potensrekker, blir det banalt å regne ut en del grenseverdier. Finn

$\boxed{18}$ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ $\boxed{19}$ $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos \theta}{\theta}$ $\boxed{20}$ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x}$

Du kan også stort sett integrere og derivere ledd for ledd og herje fra deg. (Arnes bok kap. 6.5.)

$\boxed{21}$ Uttrykk standardnormalfordelingsintegralet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{-x^2/2}\,dx$$

som en taylorrekke om 0, og skriv en kode som regner ut partialsummer. Sammenlikne kjøretid med trapesmetodekoden din fra i høst. Hva går kjappest for et gitt presisjonsnivå? (Hint: Søk opp "python cpu time" på nett om du ikke har gjort dette før.)

Det er for øvrig lett å finne ut hvor god approksimasjon en partialsum er når rekken er alternerende: `https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_series`

$\boxed{22}$ Hvor mange ledd må du ta med over for å approksimere integralet med en feil på under 10^{-2}?

Ofte kan man finne ut hva en rekke konvergerer til ved å gjenkjenne at det er en taylorrekke evaluert i et eller annet punkt. (Se Arnes bok kap. 6.6.) Finn

$\boxed{23}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\boxed{24}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ $\boxed{25}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}$ $\boxed{26}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\boxed{27}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Det er faktisk slik at dersom A er en kvadratisk matrise, er

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + A^2/2 + A^3/6 + \cdots$$

en naturlig definisjon på e^A.

$\boxed{28}$ Nå kan du kanskje prøve på nytt på oppgave 49 fra linalgøkten.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Finn konvergensområdet for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$\boxed{2}$ Finn taylorrekken til $f(x) = x \ln x$ om $x = 1$. For hvilke x konvergerer denne?

Vi har tidligere sett at Newtons metode stort sett konvergerer mye kjappere en "vanlig fikspunkt". Uttrykkene i oppgave 10 og 11 over kalles feilestimater. De forteller noe om hvordan feilen endres fra iterasjon til iterasjon. Vanlig fikspunkt har linæer konvergens, siden feilen i iterasjon $n+1$ er proporsjonal med feilen i iterasjon n, mens Newton har kvadratisk; feilen i iterasjon $n+1$ er proporsjonal med kvadratet av feilen i iterasjon n, Dette kan imidlertid bryte sammen.

$\boxed{3}$ Prøv først å finne roten $r = 1$ til

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

og til

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = (x-1)^2(x-3)(x-4)$$

med Newtons metode. Kan du forklare hva som skjer?

LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{1}$ Rekkeutviklingen til $\arctan$-funksjonen er ganske lett å huske, så jeg husket den, og beregnet

$$\arctan\left(\frac{15}{19}\right) \approx \frac{15}{19} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{15}{19}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{15}{19}\right)^5 = 0.69$$

som gir en vinkel på omtrent

$$\frac{0.69}{2\pi} \cdot 360 = 39.4$$

grader. Dette er helt feil vinkel, så antagelig husker jeg feile kateter. Tror kanskje det egentlig var 8 og 15, som gir

$$\arctan\left(\frac{8}{15}\right) \approx \frac{8}{15} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^5 = 0.49$$

og en vinkel på omtrent

$$\frac{0.49}{2\pi} \cdot 360 = 28.2,$$

for jeg husker at jeg sa til blikkenslageren at takvinkelen var omtrent 28 grader.

$\boxed{2}$ La $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = x - s$ slik at $v'(s) = -1$. Vi beregner

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \int_0^x e^s \, ds \\
&= 1 - \int_0^x (-1) \cdot e^s \, ds \\
&= 1 - (x-s)e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \int_0^x (x-s)e^s \, ds \\
&= 1 + x + \int_0^x (x-s)e^s \, ds
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Vi kjører en gang til. La $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{2}(x-s)^2$ slik at $v'(s) = -(x-s)$, og

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \int_0^x (x-s)e^s \, ds \\
&= 1 + x - \int_0^x -(x-s)e^s \, ds \\
&= 1 + x - \frac{1}{2}(x-s)^2 e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^s \, ds.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Nå håper jeg du husker induksjonsbevis fra gymnaset. Hvis ikke, kan du lese kap. 1.10 i Arnes bok. Vi skal sjekke formelen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds.$$

og vi har allerede sjekket den for $n = 0$ (analysens fundamentalteorem), $n = 1$ og $n = 2$, så vi kan gå rett på induksjonssteget. Anta at likningen holder, og la $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{(n+1)!}(x-s)^{n+1}$ slik at $v'(s) = -\frac{1}{n!}(x-s)^n$. Vi beregner

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{n!}\int_0^x -(x-s)^n e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-s)^{n+1} e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-s)^{n+1} e^s \, ds.
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$ Du finner pythonkode her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/taylor/`

$\boxed{5}$ Her er det lurt å se på

$$
e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds
$$

som forteller oss noe om hvor mye taylorpolynomet bommer på den faktiske verdien til eksponensialfunksjonen. Alle barn i barnehagen skjønner at

$$
\left|\int f\right| \leq \int |f|
$$

slik at

$$
\begin{aligned}
\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| &= \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\int_0^x |(x-s)^n e^s| \, ds \\
&\leq \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-s)^n \, ds = \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

og setter vi $x = 1$, får vi

$$
\left|e - \left(1 + x + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds\right| \leq \frac{e}{(n+1)!}
$$

Nå vil onde tunger kanskje innvende at hvis vi ikke vet hva e er, hjelper ikke feilestimatet oss så mye. Men fakultetene stiger helt ekstremt fort. La oss si at vi visste $e < 3$. I så fall vet vi at

$$
\left|e - \left(1 + x + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}
$$

Jeg skrev opp de desimalene jeg huska i farten, og det ser ut til å være rundt tjue stk. Hvis du går på wikipedia og sjekker fakulteter, vil du se at $25! \approx 10^{25}$, så noen og tjue ledd burde holde i massevis. Hvis du faktisk ønsker å sjekke, må du finne ut hvordan python regner med flere desimaler enn seksten. (Google “numpy extended precision”.)

$\boxed{9}$ Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r, sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r, og vi ser nå hvorfor det er lurt å ha enn viss peiling på hvorvidt $|g'| < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjør.

$\boxed{11}$ Vi bruker taylors teorem (husk at $f(r) = 0$)

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2$$

for s mellom x_n og r. Newtons metode er

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Trekker vi disse likningene fra hverandre, får vi

$$0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2.$$

Her står det at

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

som sier at Newtons metode i mange situasjoner har kvadratisk konvergens. Det går an å sette opp presise kriterier for når dette skjer, men det skal vi ikke gjøre.

$\boxed{12}$ Dette utrrykket er relativt greit å derivere mange ganger:

$$\frac{d}{dx^n}\frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^n}$$

og hvis vi evaluerer i $x = 0$ og setter inn i taylorformelen med $a = 0$, får vi

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x_n.$$

I retrospekt kom dette kanskje ikke som noe sjokk.

$\boxed{13}$ Her er det enklest å bruke forholdstesten. Vi beregner

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

som gir konvergens for $|x| < 1$ og divergens for $|x| > 1$. For $x = 1$ får vi den harmoniske rekken, som er divergent, og for $x = -1$ får vi den alternende harmoniske rekken, som konvergerer. Konvergensområdet er altså $[-1, 1)$.

$\boxed{14}$ Denne kan du gjøre på akkurat samme måte, men konvergensområdet blir $[-1, 1]$.

$\boxed{15\text{-}17}$ Samme her, bruk forholdstesten på akkurat samme måte, og sjekk endepunktene for konvergensområdet manuelt om det trengs.

$\boxed{18}$ Denne har vi allerede regnet ut geometrisk, men det taylorrekken gjør slikt enklere å huske:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}=\lim_{\theta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n+1)!}=1$$

$\boxed{19}$ Samme her:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\right)=\lim_{\theta\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n-1}}{(2n)!}=0$$

$\boxed{20}$ Og her:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x}&=\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}-1\right)\left(x-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}\right)\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6/2+\cdots}{x^3/3!-x^5/5!+\cdots}=3!\end{aligned}$$

$\boxed{21}$ Vi setter $-x^2/2$ inn for x i rekken for eksponensialfunksjonen:

$$e^{-x^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2/2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}$$

Hvis du leser kapittel 6.7 i Arnes bok, vil du se at det går greit å integere denne rekken fra 0 til 1, slik at

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}\,dx\\=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\int_0^1 x^{2n}\,dx\\=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

Du finner pythonkode her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/kvadratur/normalfordeling/maclaurin.py`

$\boxed{22}$ Lett! Summen til en alternerende rekke approksimeres av partialsummene med en feil som alltid er mindre enn det første utelatte ledd i absoluttverdi. det første leddet er $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, og det andre er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^1}{2^1\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2\cdot 1+1}=-\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$$

mens det tredje er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)^2}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \leq 10^{-2}$$

Vi trenger altså bare to ledd for å få en approksimasjon som er mindre 10^{-2} fra korrekte verd.

$\boxed{23}$ Dette er eksponensialfunksjonen evaluert i $x = 1$.

$\boxed{24}$ Dette er eksponensialfunksjonen evaluert i $x = i$.

$\boxed{25}$ Cosinusfunksjonen evaluert i $x = 1$.

$\boxed{26}$ Arcustangensfunksjonen evaluert i $x = 1$.

$\boxed{26}$ Hehehe husker ikke helt hva jeg tenkte her, men denne hersker det faktisk litt usikkerhet om i fagfeltet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s_constant`

$\boxed{28}$ Du gjettet helt riktig. Hvordan vi beregner e^A der A er en matrise, skal vi se på til våren.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Bruk rekkeutviklingen til sinusfunksjonen til å skrive

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

som en alternerende rekke, og finn en tilnærming til integralet ved å legge sammen de to første leddene i rekken. Gi en øvre skranke for feilen.

Løsning: Vi husker jo godt sinusfunksjonens taylorrekke om $a = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

som gir

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Vi kan få lov til å integrere denne ledd for ledd

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}\bigg|_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \cdots \end{aligned}$$

Den etterspurte tilnærmingen blir da

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18},$$

og siden det neste leddet i rekken er $1/600$ må feilen være mindre enn dette.

$\boxed{2}$ Vis at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergerer for $-1 \leq x \leq 1$. og gjør rede for at

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

i rekkens konvergensområde.

Løsning: Vi bruker forholdstesten, og regner ut at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(-1)^n x^{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = x^2 < 1$$

dersom $|x| < 1$. Dette impliserer at rekken konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$ Vi sjekker endepunktene. For $x = 1$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

og for $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

som begge er konvergente rekker. Konvergensområdet er altså $|x| \leq 1$. Det enkleste så, er å starte med geometrisk rekke:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n$$

substituere $x = -s^2$:

$$\frac{1}{1+s^2} = \sum_{n=0}(-1)^n s^{2n}$$

og så integrere hele greia fra 0 til x, og få

$$\arctan x = \sum_{n=0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\boxed{3}$ Gjør rede for at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Løsning: Alle barn husker uttrykket for geometrisk rekke siden de har pugget det på skolen. Vi kan integrere denne leddvis:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Longrightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Den siste rekken blir en konvergent alternerende rekke når $x = 1$, og vi ser at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Merk at rekkene for $\frac{1}{1-x}$ og $\frac{1}{1+x}$ ikke konvergerer for $x = 1$.

$\boxed{4}$ Gjør rede for at

$$\frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}.$$

Løsning: Hvis vi deriverer den geometriske reken, får vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

og dersom denne evalueres i $x = \frac{1}{3}$, får vi

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}.$$