1 - 9 - INTEGRALET I - LF

$\boxed{-17}$ $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$

$\boxed{-16}$ $\int_0^1 1 - x^2 \, dx = \frac{2}{3}$

$\boxed{-15}$ $\int_0^1 \sqrt{x^2+4x+4}\, dx = \int_0^1 \sqrt{(x+2)^2}\, dx = \int_0^1 (x+2)\, dx = \frac{5}{2}$

$\boxed{-14}$ Litt mer finurlig, men kan du trigonometriske formler, kan du alt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos\left(2\frac{1}{2}x\right)}\, dx \\
= &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\, dx \\
= &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \left(1-\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right)}\, dx \\
= &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\, dx \\
= &\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}x\right)\, dx \\
= &2\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2
\end{aligned}
$$

$\boxed{-13}$ Sinusfunksjonen er 1 i $x = \pi/2$ og minus -1 i $x = 3\pi/2$, så da er $y = \sin^2(\pi/2) = \sin^2(3\pi/2) = 1$ og vi kan integrere:

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 1 - \sin^2 x \; dx = &\pi - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 x \; dx \\
= &\pi - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \; dx \\
= &\pi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{4} \; dx \\
= &\pi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\frac{1}{2} + \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4} \; dx \\
= &\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(2x) \; dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Merk hvordan vi slipper å huske trigonometriske formler om vi husker Eulers formel!

$\boxed{-12}$ $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx = \log|1+\cos(x)| + C$

$\boxed{-11}$ $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{3/2} + C$

$\boxed{-10}$ $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

$\boxed{-9}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \arctan(\sqrt{x}+1) + C$

$\boxed{-8}$ $\displaystyle\int_0^2 x/(x^2+16) = \frac{1}{2}\log|x^2+16|\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\log(20) - \log 16\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{5}{4}\right)$

$\boxed{-7}$ Dette integralet er temmelig likt som integralet i oppgave 22 i økt 1-1. Men la oss ta dette med Eulers formel:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x\cos x\,dx = &\int_0^1 e^x\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,dx \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\,dx \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i}e^{(1-i)x}\right)_{x=0}^{x=1} \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}e^{1+i} + \frac{1}{1-i}e^{1-i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right) \\
=&\frac{e}{2}\left(\frac{1}{1+i}e^{i} + \frac{1}{1-i}e^{-i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right) \\
=&\frac{e}{2}\left((1-i)e^i + (1+i)e^{-i}\right) - \frac{1}{2}\left(1-i+1+i\right) \\
=&e\left(\cos 1 + \sin 1\right) - 1
\end{aligned}$$

$\boxed{-6}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\log a = \infty$

$\boxed{-5}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} 1 - \frac{1}{a} = 1$

$\boxed{-4}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty} 2\sqrt{a} - 2 = \infty$

$\boxed{-3}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} -\log a = \infty$

$\boxed{-2}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a} - 1 = \infty$

$\boxed{-1}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} 2 - 2\sqrt{a} = 2$

$\boxed{1}$ Poenget med dette er at e^{-x^2} ikke kan antideriveres slik du er vant til. Du må til med numeriske teknikker.

$\boxed{3}$ De øverste er nedre og øvre, mens de nederste er venstre og høyre. Beklager om du er blant de femten prosentene som lider av LFC.[1]

$\boxed{3}$ Nope, ihvertfall ikke i den forstand du er vant til.

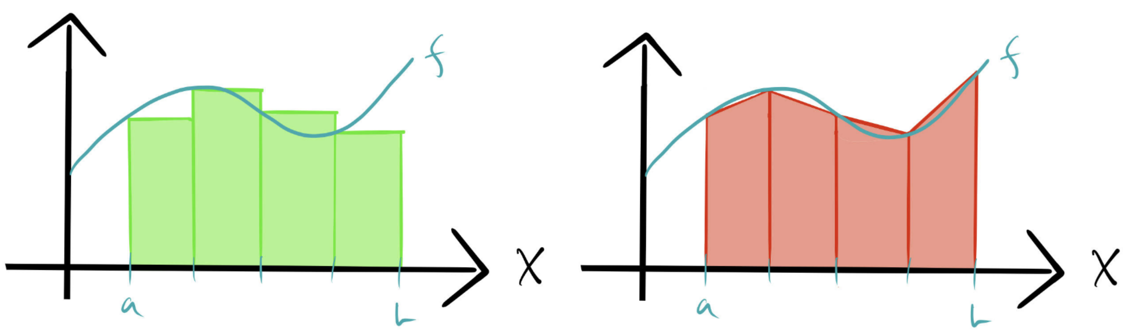
$\boxed{7}$ I denne mappen:
`https://folk.ntnu.no/mortano/normalfordelingen/`
finner du litt forskjellig.

Trapesmetoden er implementert på to forskjellige måter i trapes.py, slik at du kan se med egne øyne hvor inni hampen ineffektivt det er å kjøre for-løkker i python. (Koden regner ut arealet mellom μ og b standardavvik over μ. Siden normalfordelingen er speilingssymmetrisk om aksen $x = \mu$, er dette i bunn og grunn alt man trenger.)

Det finnes også rustkode for trapesmetoden. Med denne kan få se med egne øyne at i et "ordentlig" spåk (altså et språk som er skrevet for tallknusing heller enn brukervennlighet), er det gjerne motsatt; for-løkker er helt sykt kjapt. Nyt også hvor lett det er å parallellisere i rust. (Takk til Gudbrand.)

I mappen finnes også et par andre koder basert på mer avanserte strategier for å beregne arealet under grafen numerisk. Dette kommer vi tilbake til.

Jeg har ikke implementert midtpunktmetoden eller riemannsummer, men jeg lover at både midtpunkt- og trapesmetoden kommer til å gi mer nøyaktige svar enn riemannsummene. Dette bør være klart om du tegner opp. Følgende figur sammenlikner trapesmetoden (høyre) og venstre riemannsum (venstre):



Du klarer sikkert å lage en tilsvarende figur for midtpunktmetoden.

$\boxed{8}$ Her er det bare å bytte ut standardnormalfordelingen med sincfunksjonen i koden fra forrige oppgave.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Left-right_confusion`

$\boxed{9}$ Dette er oppgave 1 i økt 1-5, og er løst med gaussing der.

$\boxed{10}$ Symbolet Π (store pi) betyr produkt, og funker på samme måte som Σ bare med produkt istedet for sum. Hvis du synes det er uvant og tenke på dette symbolet, viste jeg et eksplisitt eksempel på konstruksjon av lagrangefunksjoner i forelesning. Det er ikke så vanskelig som det ser ut.

$\boxed{11}$ Dette er altså bare å skrive opp:

$$\begin{aligned}p(x) =& 1 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x) + 2 \cdot l_3(x)\\ =& 1 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-2}{0-3}\\ &+ 0 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3}\\ &+ 1 \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3}\\ &+ 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Hvis du ser nøye på en figur av trapesmetoden (for eksempel i lf til oppgave 8) samt skjønner hva interpolasjon handler om, vil du se at trapesmetoden er konstruert ved å interpolere med et første ordens polynom på hvert delintervall.

$\boxed{13}$ Her er det bare å brette opp ermene. Interpolasjonspolynomet er

$$\begin{aligned}p(x) = & f(a) \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{a-b}\\ &+ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{x-a}{\frac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{x-b}{\frac{a+b}{2} - b}\\ &+ f(b) \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{b-a}\end{aligned}$$

Å beregne integralene ser kjedelig ut, men litt smart bruk av produktregelen gjør alt mye enklere. Vi beregner

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\ dx =& \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)^2\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2\\ =& -\frac{1}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)^2 - \frac{1}{6}(b-a)^3\\ =& \frac{1}{4}(b-a)^3 - \frac{1}{6}(b-a)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(x-b)\ dx =& \frac{1}{2}(x-a)(x-b)^2\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2\ dx\\ =& -\frac{1}{6}(b-a)^3.\end{aligned}$$

Den observante student vil nå innse at

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\,dx &= \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx\\ &= \frac{1}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$

siden $\frac{a+b}{2}$ ligger midt mellom a og b og de to integrandene er symmetriske om dette punktet. (Men regn det ut om du ikke tror meg; beregningen blir omtrent den samme. Jeg beregna først og oppdaget symmetrien etterpå.)

Simpsons regel blir altså

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx\; & f(a)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{1}{a-\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{a-b}\\ & -f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}(b-a)^3\frac{1}{\frac{a+b}{2}-a}\cdot\frac{1}{\frac{a+b}{2}-b}\\ & +f(b)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{1}{b-\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{a-b}\\ =\; & f(a)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{a-b}\\ & -f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}(b-a)^3\frac{2}{b-a}\cdot\frac{2}{a-b}\\ & +f(b)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{2}{b-a}\cdot\frac{1}{b-a}\\ =\; & \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)\right)\end{aligned}$$

Herregud for en lang og kjedelig beregning. Definitivt en once in a lifetime experience å utlede Simpsons regel. Dette gjør jeg aldri igjen!

14 Det kjappeste jeg har fått til er en 40 nanosek, men det finnes folk i klassene over dere som har gjort det mye fortere. Gå på let etter en morsom fyr på elsys som heter Leo Laukvik og spør ham.

Jeg integrerte maclaurinrekken ledd for ledd. Dette får du lære om i uke 46. Kode: `https://folk.ntnu.no/mortano/normalfordelingen/rust/maclaurin/`

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Siden $\cos x \geq \cos 1 > 0$, og integranden er positiv på $[0, 1]$, kan vi skrive

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx \geq \int_0^1 \frac{\cos 1}{x}\, dx \geq \cos(1) \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

Integralet divergerer.

$\boxed{2}$ **Løsning:** Et tredjeordens polynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

der $a \neq 0$. Dersom polynomet skal gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 5)$, har vi fire likninger

$$\begin{aligned} 1 &= p(0) = d \\ 2 &= p(1) = a + b + c + d \\ 3 &= p(2) = 8a + 4b + 2c + d \\ 5 &= p(3) = 27a + 9b + 3c + d \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

om du foretrekker det.

Siden den første likningen sier at $d = 1$, kan vi umiddelbart forenkle til

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 4 \end{array}$$

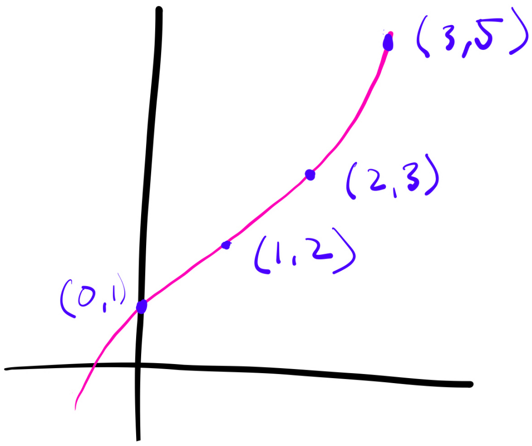
og gausseliminere

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 4 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 18 & 24 & 23 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{array}$$

slik at $c = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $a = \frac{1}{6}$. Polynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

Her er plot:



Det går også helt fint å bruke lagrangepolynomer, og skrive opp interpolanten på direkten:

$$\begin{aligned} p(x) = &1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \\ &+2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ &+3 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\ &+5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \end{aligned}$$

Det blir seff det samme, som du kan sjekke om du orker.

$\boxed{3}$ Dette er en klassiker i TMA4100, og du finner Selveste Seips løsningsforslag her:
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2014h.pdf`