TMA4101/4106/4111/4121

1 - 8 - REKKER

Summetegnet

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

er et nyttig redskap. Arkimedes klarte å beregne arealet under kurven $y = x^2$ for over to tusen år siden. Han kunne nok ikke antiderivere. Man trenger bare barneskolegeometri (arealet av et rektangel) og en litt komplisert grenseverdiprosess. La oss se litt på omtrent hva arkimedes gjorde.

Siden x^2 er monotont stigende, vil venstre og nedre riemannsum være like på alle intervaller på formen $[0, b]$. Samme for høyre og øvre riemannsum. La oss ta høyre bare for enkelhets skyld.

$\boxed{1}$ Vis at øvre riemannsum for en jevn partisjon med n delintervaller på $[0, b]$ blir

$$\frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Nå trenger vi å finne et lukket uttrykk for

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Det finnes en pen strategi for å induktivt utlede lukkede uttrykk for

$$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad \text{osv}$$

$\boxed{2}$ Den første husker du kanskje fra barneskolen? Jeg husker at læreren en gang kom inn i klasserommet og ba oss legge sammen alle tallene fra 1 til 100. Hvis du ikke husker formelen, kan du utlede den fra likningen

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = -n + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

De neste formlene kan nå utledes med det samme trikset, men det blir mer og mer regning. Ypperlig jobb for en datamaskin. Formelen for $\sum_{k=1}^{n} k^2$ kan for eksempel utledes fra

$$n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

og forrige formel for, altså den for $\sum_{k=1}^{n} k$.

$\boxed{3}$ Hvis du nå holder tungen beint i munnen og lar $n \to \infty$, klarer du kanskje å se at

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}.$$

Forrige sides eskapader var der litt for å trene på summering, og litt for å repetere riemannsummer, og litt for å forberede oss på denne ukens stoff, som er litt teknisk. I anvendt matematikk og fysikk er det såpass vanlig at ting skrives som uendelige summer at det kan være smart å sette av litt tid til å studere slike.

Ingen lærebok i matematikk begynner et kapittel om rekker uten Xenos paradoks, som er rundt 2500 år gammelt. Anta at en langdistanseløper skal tilbakelegge en distanse. Han tilbakelegger første halvdel på tiden T. Den neste fjerdedelen tibakelegger han på tiden $T/2$. Den neste åttendedelen tilbakelegger han på tiden $T/4$. Og slik fortsetter det. Xeno trodde han hadde funnet et paradoks, for han trodde at

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = \infty$$

siden venstresiden er en sum av uendelig mange tall. Dette er ikke riktig. Dersom Xeno hadde satte seg inn i følgende utledning, hadde han skjønt at han var på villspor. På skolen har du lært om den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Det er ikke så vanskelig å se at dette er riktig dersom $|x| < 1$. **Partialsummene** er

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N,$$

og hvis vi beregner

$$\begin{aligned}(1-x)S_N &= (1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^N \\ &\quad - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N+1}) = 1 - x^{N+1},\end{aligned}$$

får vi

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}.$$

Dersom vi lar $N \to \infty$, ser vi nå at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \infty & |x| > 1 \\ \infty & x = 1 \\ ? & x = -1 \end{cases}$$

så skal man tillegge langdistanseløperens tilbakelagte distanse noen verdi, er det naturlig å sette

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = \frac{T}{1 - 1/2} = 2T.$$

$\boxed{4}$ Denne utledningen kan du bli spurt om til eksamen.

Hsuk at en følge z er en funksjon på $\mathbb{N}$, og at leddene i følgen skrives z_n. En **rekke** er summen av leddene i en følge

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

På kortform skriver vi $\sum z$, og uttrykket

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_N$$

kalles **den n-te partialsummen** til rekken. Disse danner en følge S. Grunnen til at jeg plager deg med disse tekniske begrepene er at det kan være vanskelig å vite hva som er sant og ikke sant når summene går til uendelig. La oss se litt på den geometriske rekken

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

for å illustrere problemet. Her er et klassisk triks for å finne L. Man ganger rekken med 2, og får

$$2L = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + L$$

som gir $L = 2$. Dette er korrekt.

$\boxed{5}$ Hva skjer om du prøver samme triks på

$$L = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots \text{ ?}$$

Her er en annen gøy en. La oss kalle summen av alle naturlige tall x, og summen av alle oddetall y. Hvis vi splitter x i oddetall og partall:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots \\ &\quad + 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots \\ &\quad + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots) = y + 2x \end{aligned}$$

og kansellerer en x fra hver side av likningen, får vi

$$x + y = 0$$

altås at summen av alle oddetall og summen av alle naturlige tall må summere til null. Dette er åpenbart absurd.[1] Så det er ikke så godt å vite hva man skal tro på alltid. Men nå skal jeg vise noen triks som hjelper oss til å holde hodet kaldt.

$\boxed{6}$ Gå tilbake til økten om likninger og repeter konvergent følge, eller les kap. 2.2 i Arnes bok.

[1] Men at

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

er derimot ikke absurd, om du opererer med litt andre regneregler enn det du er vant til:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan_summation`

Hvis du ser på den geometriske rekken, ser du at for noen verdier av x, får vi et tall, mens for noen verdier får vi uendelig eller

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

som ikke er så godt å si noe fornuftig om. Vi kan nå hive all forvirring og frustrasjon på havet, og definere at en rekke er **konvergent dersom partialsummene danner en konvergent følge**. En rekke som ikke er konvergent, er **divergent**. Bildet på denne siden er et klassisk eksempel på det som i dagligtale vi mener med konvergens. Brøytestikkene eller grøftekantene i bildet står jo i virkeligheten like langt fra hverandre, men på bildet konvergerer de mot et teoretisk punkt langt borte.

4 - coup de grace Vis at den geometriske rekken er divergent for $x = -1$.
(Hint: Tegn opp et koordinatsystem med $\mathbb{N}$ på den ene aksen og partialsummene på den andre og sammenlikne med konvergensfiguren i økten om likninger, så ser du det nok.)

Å vise "ordentlig" at den geometriske rekken konvergerer til $1/(1-x)$ når $|x| < 1$ (altså med N og ϵ) er litt teknisk. Se ukens nøtter.

Geometriske rekker har du regnet ganske mye på på gymnaset, så vi skal ikke herje så mye med det. Men noen triks kan være lurt å kjenne til, og de dukker opp her og der i anvendelser.

7 Finn summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

8 Hva med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}?$$

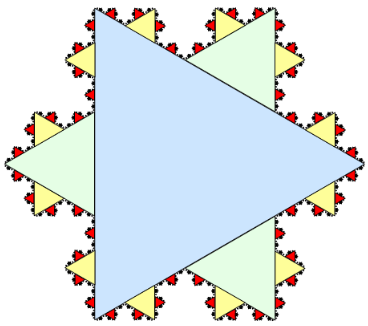
9 Enn

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}?$$

Her er en klassiker fra TMA4100:

10 En sprettball slippes rett ned og spretter opp $3/4$ av høyden den ble sluppet fra. Hvor langt vil ballen vil bevege seg før den blir liggende stille når den slippes fra en høyde på 3 meter?

11 Figuren (takk til Jim Belk, hvem nå enn det er) viser begynnelsen på noe som heter kochsnøflaket. Dette er en fraktalkurve:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_curve`
Dette var ansett som utrolig hipt på 80-tallet. Forholdet mellom sidekantene på forskjellige trekanter i Kochsnøflakets konstruksjon er alltid potenser av $1/3$.
Vis at kochsnøflaket har uendelig omkrets men endelig areal. Hva er arealet?



Det finnes mange teknikker for å avgjøre konvergens. Den viktigste kalles **sammenlikningstesten**. La y og z være positive følger, med $y_n \leq z_n$ for alle n. Det er ikke så veldig vanskelig å vise at

Dersom $\sum y$ divergerer, divergerer $\sum z$.
Dersom $\sum z$ konvergerer, konvergerer $\sum y$.

Hvis man skal nyttiggjøre seg denne, må man kjenne til noen rekker. To hjørnesteiner er at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Den første kan utledes på flere måter. Du finner to av dem her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics)`

$\boxed{12}$ Å vise at den harmoniske rekken divergerer kan du bli spurt om på eksamen.

Den andre kan utledes fra fourierrekken til trekantbølgen og noe som kalles Parsevals identitet. Det kommer vi tilbake til senere. Med disse to rekkene og sammenlikningstesten i verktøykassen, er det mange rekker som lett kan analyseres:

$\boxed{13}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\boxed{14}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ $\boxed{15}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\boxed{16}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ $\boxed{17}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Dersom $\sum |z|$ er konvergent, sier vi at $\sum z$ konvergerer **absolutt**, og dersom denne ikke er konvergent, men $\sum z$ er, heter det **betinget konvergens**. En grei lifehack er at dersom z er en positiv og monotont synkende følge som konvergerer mot null, er

$$\sum_n (-1)^n z_n$$

alltid konvergent. Dette kalles en alternerende rekke. For eksempel er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

Hvorfor akkurat $\ln 2$ kommer vi tiilbake til i neste uke. Det burde være klart at en rekke ikke kan konvergere med mindre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\boxed{18}$ Nå kan du lese 6.1 og 6.2 i Arnes bok og gjøre alle oppgavene.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Skriv en rutine som bruker trikset i oppgave 1 for å skrive ut formelen for

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = 1 + 2^m + 3^m + \cdots$$

Denne kalles gjerne Faulhabers formel:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber%27s_formula`

$\boxed{2}$ Bruk definisjonen av konvergent følge til å vise at

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

når $|x| < 1$.

Det er ellers en grei life hack at en monoton og begrenset reell følge alltid må konvergere, se kapittel 2.2 i Arnes bok. Dette nyttiggjør man seg når man skal definere riemannintegralet ordentlig. La oss se på det. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a, b]$. La

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad \text{og} \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Den øvre og nedre riemannsummen til f på partisjonen P er henholdsvis:

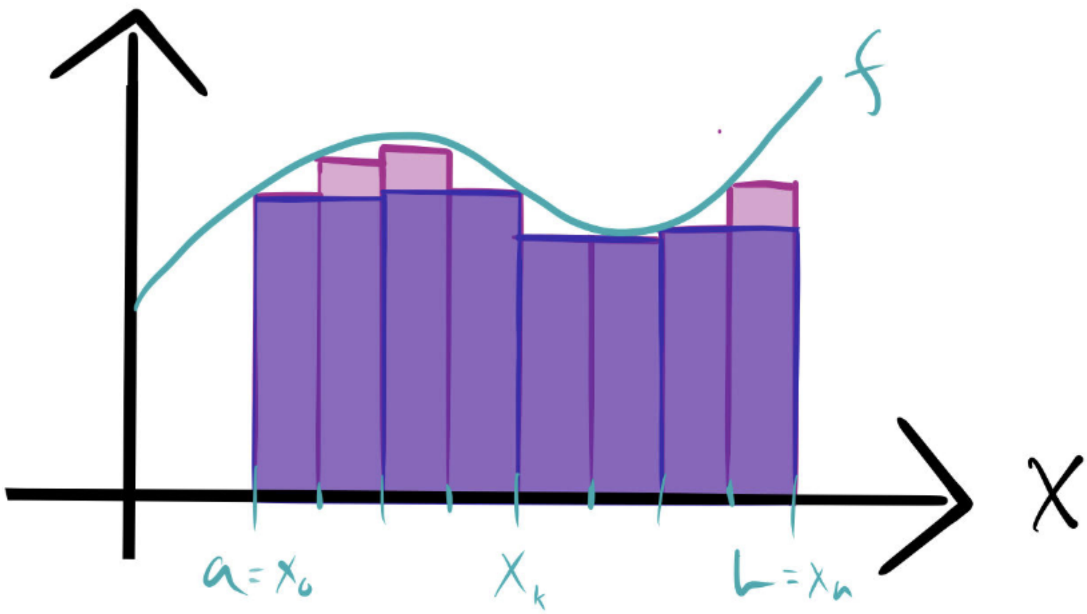
$$U(P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i \quad \text{og} \quad L(P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

Dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av intervallet $[a, b]$ slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

sier vi at f er integrerbar.

$\boxed{3}$ Bruk teorem 2 i 2.2 til å vise at en kontinuerlig funksjon (se kapittel 2.3) på $[a, b]$ er integrerbar.

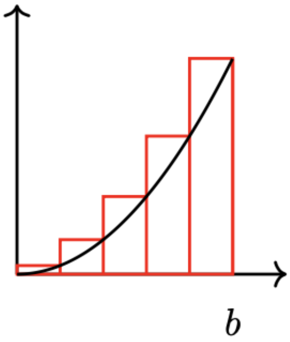


Det er visst mange ting i kroppen din som har begynnende fraktalstruktur. Nevroner og blodårer har visst en regel på at de deler seg i to mindre deler når de har vokst til en lengde som er så og så mange multipler av diameteren. Geometriske rekker er nyttig verktøy i analyse av slikt.

$\boxed{4}$ Del en kube i tjuesyv like store mindre kuber og fjern syv av dem; den i midten samt de seks midt på endeflatene. Du har nå en litt rar og delvis hul ting bestående av tjue kuber. Hvis du gjentar prosessen med disse tjue kubene og så med de resulterende fire hundre mindre kubene og så fortsetter videre i samme stilen, får du **mengersvampen**.
Vis at mengersvampen har uendelig overflateareal men ikke noe volum.
(Dette er visst ikke ulikt blodåresystemet ditt; du har omtrent hundre tusen kilometer med blodårer i kroppen din, men de fyller tre prosent av kroppens volum.)

LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{1}$ La $f(x) = x^2$. Gitterpunktene blir



$$x_k = hk = \frac{bk}{n}$$

der indeksen k løper fra 0 til n. Riemannsummen blir

$$\sum_{k=1}^{n} hf(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} f\left(\frac{bk}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

$\boxed{2}$ I tredje klasse på barneskolen viste vår klasseforstander Jodis oss at

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots = 50 \cdot 101.$$

Vi ble målløse av beundring, men når jeg i voksen alder skulle bruke det samme trikset, innså jeg at det man må tenke seg litt mer om, for hvis du summerer et odde antall stigende heltall, ser det jo bittelitt annerledes ut. Formelen blir den samme, men om man som meg har ikke spesielt høy IQ, er det ikke helt innlysende. Derfor er det penest å gange ut

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = -n + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

og løse for

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\boxed{3}$ Vi gjentar suksessen, ganger ut

$$n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

og løser for

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3 + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n}{3} = \frac{n^3 + 3\frac{n^2+n}{2} - n}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Bruker vi oppgave og stoler på at riemannsummen finner frem til integralet når $n \to \infty$, får vi

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\cdot\frac{1/n^3}{1/n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{1}\frac{2+3/n+1/n^2}{6} = \frac{b^3}{3}.
\end{aligned}$$

5 Vi får

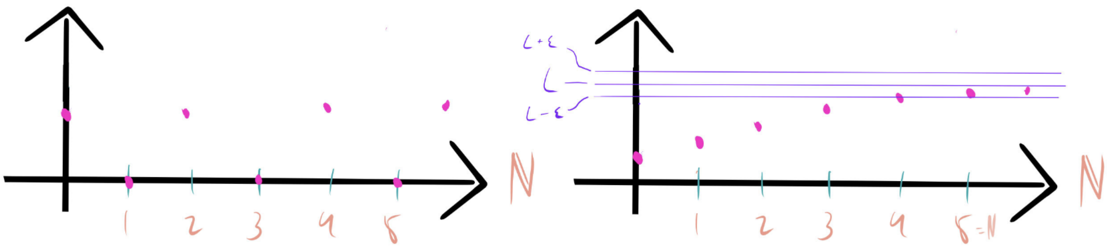
$$2L = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = L - 1$$

som gir $L = -1$. Dette er åpenbart absurd. Vi har altså ikke funnet noen strategi vi kan stole helt på om vi ønsker å finne ut hva en rekke summerer til.

6 Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er **konvergent** dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

I figuren under er et maleri av partialsummene til den geometriske rekken evaulert i $x = -1$, sammenliknet med et maleri av en konvergent følge som konvergerer mot en verdi L. Jeg har tegnet inn en ϵ for illustrasjon. Husk at om det skal være konvergens skal denne kunne velges fritt, altså så liten man vil, og så må du alltid kunne finne N slik at følgen holder seg nærmere L enn ϵ for alle $n > N$.



Selv om følgen til venstre i figuren ikke konvergerer, er den **begrenset**; det finnes et tall M slik at leddene i følgen alltid er mindre enn M i absoluttverdi. Her er en faktoide. En begrenset følge har alltid en **konvergent delfølge**. Dette betyr at du får en konvergent følge om du hiver ut de leddene som ødelegger konvergensen for deg, litt som når man cherrypicker data for å få en bestemt konklusjon.[2] I dette tilfellet må du hive ut annethvert ledd i følgen.

789 Disse oppgaven var så like, så la oss utlede en formel.

$$\sum_{k=n}^{\infty} x^k = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = k^n \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) = k^n \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x}$$

Denne formelen gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1-(1+i)} = i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1+i}{1-(1+i)} = -1 + i$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^{10}}{1-(1+i)} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{10}}{-i} = -32$$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Cherry_picking

10 Ballen faller først ned tre meter. På første sprett opp og ned igjen blir det $2 \cdot 3 \cdot 3/4$ meter, og på andre sprett $2 \cdot 3 \cdot (3/4)^2$ meter og så videre, slik at total tilbakelagt distanse i meter blir

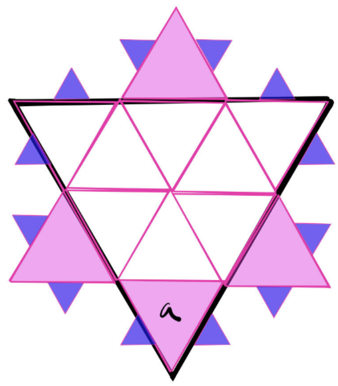
$$3 + 2 \cdot 3 \cdot (3/4) + 2 \cdot 3 \cdot (3/4)^2 + \cdots = 3 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3 + 6 \cdot \frac{3/4}{1 - 3/4} = 21$$

11 La oss si at sidekanten i den opprinnelige trekanten er x, slik at omkretsen blir $3x$. Hvis du studerer figuren nøye og husker alt du har lært om likesidete trekanter på barneskolen, vil du se at omkretsen til den sekstaggete stjernen som er neste i rekken er $3x \cdot (4/3)$ siden man legger til en tredjedel av lengde på hver sidekant. Omkretsen til den neste greia blir $3x \cdot (4/3)^2$, og hvis vi lar $n \to \infty$, får vi

$$3x \lim_{n \to \infty} \cdot (4/3)^n = \infty.$$

Arealet er litt mer pjask, se figuren til høyre. Jeg måtte har tre forsøk før jeg fikk det riktig. Utregningen blir enklest om man tar utgangspunkt i den lille rosa trekanten med areal a. Den opprinnelige trekanten består av ni slike, og har areal $9a = \sqrt{3}x^2/4$, slik at $a = \sqrt{3}x^2/36$. I neste lag blir det fire ganger så mange trekanter, men hver av dem har en niendedel av arealet til trekantene i laget før, og dette systemet fortsetter. Det totale arealet blir

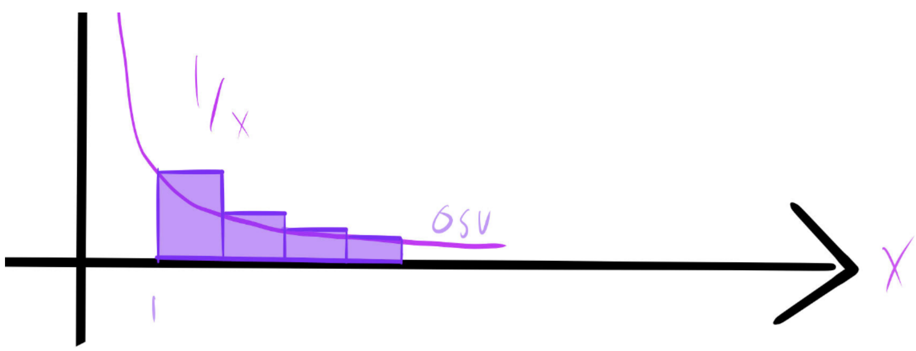
$$\begin{aligned} A =& 9a + 3a + \frac{12a}{9} + \frac{48a}{9^2} + \frac{196a}{9^3} + \cdots \\ =& 9a + 3a\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots\right) \\ =& 9a + 3a \cdot \frac{1}{1 - 4/9} \\ =& 3a\left(3 + \frac{9}{5}\right) \\ =& 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}x^2. \end{aligned}$$



12 Jeg synes det peneste er å gjøre slik:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots \\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty \end{aligned}$$

Du kan også se det ved å betrakte følgende denne figuren



og sammenlikne med

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Dette kalles **integraltesten**, se 6.2 i Arnes bok.

$\boxed{13}$ Her kan vi enten observere at siden $\sqrt{n} \leq n$ når $n \geq 1$, må

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}$$

og følgelig divergerer $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vi kan også bruke integraltesten og huske at

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$$

som impliserer divergens.

$\boxed{14}$ Denne kan løses på samme måte som 15, men konklusjonen blir motsatt.

$\boxed{15}$ Sammenlikning med $\sum \frac{2}{n^2}$ gir konvergens på denne. Det går imidlertid også an å observere at

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

slik at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots = 1.$$

Dette kalles en **teleskoperende rekke**.

$\boxed{16}$ Denne tar vi enkelt med å sammenlikne med geometrisk rekke, siden

$$\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Det er i tillegg mulig se at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n3^n} = \log\left(\frac{3}{2}\right),$$

men det må vi vente med til neste uke.

$\boxed{17}$ Siden $\sqrt{n} \leq n$ når $n \geq 1$, er også

$$2n = n + n \geq n + \sqrt{n}$$

som gir at $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergerer.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Gjør rede for at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n}$$

konvergerer dersom $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

Løsning: Forholdstesten gir konvergens for $|x| \leq \frac{1}{3}$, siden

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-3x)^{n+1}/(n+1)|}{|(-3x)^n/n|} = |3x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |3x|.$$

Dersom $x = \frac{1}{3}$ får vi den alternerende rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som er konvergent. Dersom $x = -\frac{1}{3}$ får vi rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er divergent.

$\boxed{2}$ Finn summen til rekken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}.$$

Løsning: La oss begynne med å delbrøksoppspalte innmaten i rekken. Vi søker A og B slik at

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2}$$

Dersom vi ganger opp med $n(n-2)$ på begge sider, får vi likningen

$$1 = A(n-2) + Bn.$$

Nå er det slik at dersom venstre og høyre side skal være like, må de være like for hver potens av n. Det gir likningene

$$0 = A + B$$

og

$$1 = -2A$$

som burde gå greit å løse, det er jo ikke nødvendig å gausseliminere en gang, og vi kan skrive

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}.$$

Vi setter nå dette inn i rekken, og ser mønsteret:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$