1 - 8 - LINEÆRALGEBRA III

$\boxed{1}$ Nei, disse er parallelle, og følgelig lineært avhengige, og følgelig ikke en basis for noe som helst.

$\boxed{2}$ Tja vi kan jo endre litt på den basisen vi har, for eksempel

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Har du skjønt lineær uavhengighet er det trivielt å se at denne vektormengden er lineært uavhengig, og følgelig en basis for $\mathbb{R}^5$.

$\boxed{3}$ Hvis du husker tilbake til oppgave 1 i økt 1-6, husker du kanskje at nullrommet til denne matrisen består av alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kolonnene i matrisen er derfor lineært avhengige og ikke en basis for noe.

$\boxed{4}$ Vi gausser matrisen slik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå skal jeg vise deg noe snedig. Dersom vi lar de to første kolonnene i systemet stå, og setter den tredje på høyre side og gausser, kan vi bruke de samme stegene:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dette forteller oss at den tredje kolonnen kan skrive som en lineærkombinasjon av de to første på en entydig måte, og likeledes gir

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

at den fjerde kolonnen kan skrives som en lineærkombinasjon av de to første på en entydig måte. Det følger at dimensjonen på kolonnerommet må være to, siden alle lineærkombinasjoner på formen $A\mathbf{x}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to første kolonnene, som åpenbart må være avhengige. Underrommet har av $\mathbb{R}^4$ har altså dimensjon 2. Et klassisk triks for å finne en basis for kolonnerommet til en matrise er å gausseliminere til trappeform. Antall pivotelementer[1] gir deg dimensjonen på kolonnerommet, og kolonnene med pivotelementer i trappeformen gir deg indeksene til de kolonnene i den originale matrisen som er en basis for kolonnerommet.

$\boxed{5}$ Vi gausser først

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir at dimensjonen til kolonnerommet er 2. Gausser vi den transponerte matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at radene i den opprinnelige matrisen (altså kolonnene i den transponerte matrisen) også spenner ut et rom med dimensjon 2. Dette rommet kalles **radrommet**, og det står ortogonalt på nullrommet til matrisen. For å finne rangen til matrisene i økt 1-5 og 1-6, kan du bruke det samme trikset - gausseliminér og tell antall pivotelementer.

$\boxed{6}$ I både oppgave 4 og 5 er de to første kolonnene basis for kolonnerommet, jamfør kolonnerom-basistrikset. Basiser for nullrommene finner vi å parametrisere løsningsrommene. Gaussingen

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right. \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

gir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2(-2s-3t)-3s-4t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} s \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at en basis for nullrommet er

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nullrommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

[1]

er akkurat det samme. Dette er kanskje ikke noe sjokk - likningssystemet

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

inneholder den samme informasjonen som likningssystemet

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}$$

siden den siste likningen følger av de tre første.

$\boxed{7}$ Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right) - (2-\lambda-1) + (1-(2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)\left(3-4\lambda+\lambda^2\right) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)-2) \\ &= (1-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

duger. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, men ikke på hverandre. Dette er ikke tilfeldig; vi kommer tilbake til det i TMA4106.

$\boxed{8}$ Dette er en lureoppgave. Egenrommet til egenverdien $\lambda = 0$ er det samme som nullrommet til matrisen, så vi har allerede funnet det.

$\boxed{9}$ Løsningene er som vi vet alle funksjoner på formen

$$x(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

men det er like korrekt å skrive at løsningene er alle funksjoner på formen

$$x(t) = d_1 e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + d_2 e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}.$$

Nå er det strengt tatt ikke riktig å si at vi "vet" at dette er alle løsningene, for det må egentlig bevises og det er litt overkill for dette kurset, men det er altså slik at løsningene til en lineær differensiallikning alltid danner et vektorrom med samme dimensjon som ordenen til likningen. To basiser som er akkurat like fine, er

$$\left\{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}, e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right\} \qquad \text{og} \qquad \left\{e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}.$$

Vi burde kanskje dobbeltsjekke at det er lineær uavhengighet mellom basisvektorene. Dette følger av at dersom likningen

$$0 = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

kun er sann (for alle t) dersom $c_1 = c_2$. Du kan sjekke den andre basisen på samme måte.

$\boxed{10}$ Siden likningen

$$0 = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

kun er sanne om $a_2 = a_1 = a_0$, er

$$\{x^2, x, 1\}$$

en basis for rommet av alle polynomer på formen

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

og følgelig er dette rommet tredimensjonalt.

$\boxed{11}$ For å avgjøre dette må vi ned i aksiomene i bunnen av filen. Leser du dem vil du oppdage at du må bestemme deg for hvilken kropp du skal hente skalarene i lineærkombinasjonen din fra, og vi sier at vi har et vektorrom "over" denne kroppen. De komplekse tallene er et endimensjonalt vektorrom over de komplekse tallene, men et todimensjonalt vektorrom over de reelle tallene.

$\boxed{12}$ Likningen

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 = 0$$

er kun sann om $c_2 = c_1 = c_0$, så dette er tredimensjonalt. Likningen

$$0 = c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3$$

er ikke bare sann om $c_2 = c_1 = c_0$, men også for eksempel når $c_1 = c_2 = 1$ og $c_3 = -1$, så

$$\left\{\cos^2 t, \sin^2 t, 1\right\}$$

er ikke en basis for noe. Vi kan skrive den siste vektoren (altså 1-tallet) som en lineærkombinasjon av de to første, men de to første er lineært uavhengige siden

$$c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t = 0$$

kun er sann for alle t om $c_1 = c_2 = 0$. Derfor er

$$\left\{\cos^2 t, \sin^2 t\right\}$$

en basis for vektorrommet av alle funksjoner på formen

$$0 = c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3.$$

$\boxed{13}$ For å finne koordinatene må vi løse likningssystemet

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette klarer alle barn i barnehagen og løsningen er

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Punktet $(1, 1)$ i den rare basisen er

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

så koordinatene er $(3, 3)$ i standardbasiskoordinater. Se også her:
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/8-mer_om_basisbytte.pdf`

$\boxed{14}$ Koordinatene til

$$x(t) = e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

i den første basisen er helt klart $(1, 1)$. Koordinatene den andre basisen må vi nesten regne ut ved å løse likningen

$$c_1 e^{(-1+i)t} + c_2 e^{(-1-i)t} = e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

Vi kan skrive om venstresiden med Eulers formel slik

$$\begin{aligned} e^{-t} \left(c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}\right) =& e^{-t} \left(c_1 (\cos t + i \sin t) + c_2 (\cos t - i \sin t)\right) \\ =& e^{-t} \left((c_1 + c_2) \cos t + i(c_1 - c_2) \sin t\right) \end{aligned}$$

og skal dette bli lik $e^{-t} (\cos t + \sin t)$ må koordinatene må tilfredsstille likningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ ic_1 - ic_2 &= 1 \end{aligned}$$

som løses av $c_1 = \frac{1}{2}(1 + i)$ og $c_2 = \frac{1}{2}(1 - i)$.

$\boxed{15}$ $\begin{pmatrix}20\\26\\35\end{pmatrix}$ $\boxed{16}$ $\begin{pmatrix}47\\62\\83\end{pmatrix}$ $\boxed{17}$ $\begin{pmatrix}67\\88\\118\end{pmatrix}$ $\boxed{18}$ $\begin{pmatrix}67\\88\\118\end{pmatrix}$ $\boxed{19}$ $\begin{pmatrix}181\\138\\319\end{pmatrix}$ $\boxed{20}$ $\begin{pmatrix}181\\138\\319\end{pmatrix}$

$\boxed{15}$ $2t$ $\boxed{16}$ 1 $\boxed{17}$ $2t+1$ $\boxed{18}$ $2t+1$ $\boxed{19}$ $4t+3$ $\boxed{20}$ $4t+3$

$\boxed{\text{15-21}}$ Du klarer det.

$\boxed{22}$ For eksempel 8 i økt 1-6 var lagt opp til at du skulle skjønne at du kunne bruke superposisjonsprinsippet uten å kalle det det.

$\boxed{23}$ Enkelt! $v(t) = 18\left(1 - e^{t/RC}\right)$.

$\boxed{24}$ I derivasjonstabellen du hadde på skolen sto nok denne linjen:

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

eller

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

eller en liknende variant. Ser du nøye etter, vil du vel se at dette er en egenvektorlikning der derivasjonen på venstre side er lineæroperatoren, og a er en egenverdi med korresponderende egenvektor e^{at}. At dette er alle egenvektorer er kanskje ikke trivielt, men nå vet du ihvertfall at eksponensialfunksjonen er egenvektor til derivasjonsoperatoren, og siden venstresiden i alle differensiallikninger vi har lært om til nå har vært lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorer, er det derfor vi alltid prøver oss med eksponensialfunksjonen om vi må gjette på omtrent hva løsningen er.

$\boxed{25}$ Vi gausser

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

slik at løsningene er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s - 2(-1-2s) \\ -1-2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s \\ -1-2s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den første av disse er den homogene løsningen - du kan selv sjekke at dette er løsningene til

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Så gausser vi litt mer:

$$
\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}
\sim
\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -8 & 10 & -16 & -6 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \end{array}
\sim
\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
$$

og så videre og så videre.