TMA4101/4106/4111/4121

1 - 7 - INTEGRALET

Denne uken leser vi kapittel 3 i Arnes bok, men noen delkapitler er litt viktigere enn andre. For eksempel antar jeg at du allerede kan

- 3.1
- 3.3
- 3.4
- 3.5
- 3.6
- 3.9
- 3.10
- 3.15

fra skolen. Noen av de andre kapitlene, slik som 3.7 og 3.8 er i samme ånden, men kanskje litt for hårete for R2.

Kapittel 3.2 antar jeg derimot at de fleste ikke har brukt så mye tid på før, men dette kapitlet er i bunn og grunn mye viktigere enn alle antiderivasjonsreglene, for det du trenger for å forstå alle de fysiske modellene du skal lære de neste fem årene, er *hva integralet er*. Integralet er nemlig mye mye mer enn bare "arealet under grafen".

Derfor er det mange som synes integralet er litt knotete å lære seg. Vi skal bruke mest tid på tingene som står i kapittel 3.2 og 3.12-14, så du kan trygt lese disse kapitlene, men du bør gjøre oppgavene i denne filen. Vi begynner faktisk med en snartur innom kapittel 6, for mange differensiallikninger kan løses ved å herje litt og integrere.

Fra gymnaset sitter du antagelig igjen med følgende leveregel:

INTEGRASJON = ANTIDERIVASJON

Dette er feil, men en naturlig konklusjon å trekke etter gymnaset. At man sitter igjen med et slikt inntrykk, skyldes **analysens fundamentalteorem**:

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Denne, sammen med **kjerneregelen** eller **integrasjon ved substitusjon**:

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(g(t)))\ dt = \int_a^b f'(g(t))\,g'(t)\ dt$$

og **produktregelen** eller **delvis integrasjon**:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(t)g(t))\ dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

er det man fokuserer mest på på gymnaset, for det er så enkelt lage eksamensoppgaver om det.

Det finnes empirisk evidens for at Homo Sapiens' store styrke er å følge oppskrift. [1] [2] Jeg lurer litt på om det hadde vært bedre å begynne differensiallikningøkten med en oppskrift. Det finnes nemlig en oppskrift for å løse differensiallikninger:

1: Herj litt med likningen. Gang eller del med noen greier.

2: Integrér. Du kan bruke bestemt eller ubestemt integral, og du må antagelig bruke reglene over. Gjør du steg 1 riktig, får du det ofte til, men det trengs gjerne litt erfaring får å se hva som er riktig steg 1.

Oppskriften funker på sett og vis på alle difflikninger du har sett til nå, men det er litt forskjellig fra likning til likning hva man ender opp med. Jeg skal nå illustrere med et eksempel, og så skal du prøve. La oss løse initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = x_0.$$

Steg 1 er å gange med e^{at}:

$$e^{at}(\dot{x} + ax) = 0$$

og så observere at

$$e^{at}(\dot{x} + ax) = \frac{d}{dt}(e^{at}x).$$

Dette gir likningen

$$\frac{d}{dt}(e^{at}x) = 0$$

og hvis vi bruker analysens fundamentalteorem med $f(t) = e^{at}x(t)$, $a = 0$ og $b = t$, får vi

$$e^{at}x(t) - x(0) = 0.$$

Bruker vi $x(0) = x_0$ og løser for $x(t)$, sitter vi til slutt igjen med

$$x(t) = x_0 e^{-at}.$$

Nå har jeg brukt bestemt integral, og da blir det ikke noen integrasjonskonstant. Resonnementet funker fint med ubestemt integral og, dette er mest smak og behag.

[1] https://www.eva.mpg.de/documents/Springer/Call_Copying_AnimCog_2005_1555317.pdf

[2] https://www.eva.mpg.de/documents/Wiley-Blackwell/Tennie_Push_Ethology_2006_1555112.pdf

Samme triks kan brukes for å hoste opp løsningsformelen

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{au} g(u)\, du\right)$$

til

$$\dot{x} + ax = g \qquad x(0) = x_0$$

der g er en vilkårlig funksjon.

$\boxed{-4}$ Utled formelen.

$\boxed{-3}$ Bruk formelen til å vise at løsningen er

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{c}{a}\right) e^{-at} + \frac{c}{a}$$

dersom $g(t) = c$, altså den konstante funksjonen.

$\boxed{-2}$ Bruk formelen til å vise at løsningen er

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 - \frac{1}{a+s}\right) + \frac{1}{a+s} e^{st}$$

dersom $g(t) = e^{st}$, så lenge $s \neq -a$. Hva skjer om $s = -a$?

Funksjonen

$$H(s) = \frac{1}{a+s}$$

kalles systemets **transferfunksjon**, og avhenger kun av differensiallikningens venstreside. Andre navn er **overføringsfunksjon** eller **systemfunksjon**, og materialteknikere kaller den **impedansen**. Merk at den er en delt på den homogene likningens karakteristiske polynom. Dette er en viktig funksjon; evaluert i $i\omega$ forteller den noe om hvordan systemet responderer på forskjellige påtrykte frekvenser ω. La oss se litt på dette.

$\boxed{-1}$ Vis at løsningen til

$$\dot{x}(t) + ax(t) = \cos(\omega t) \qquad x(0) = x_0$$

er

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 - \frac{1}{2}\left(H(i\omega) + H(-i\omega)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(H(i\omega)\, e^{i\omega t} + H(-i\omega)\, e^{-i\omega t}\right).$$

(Husk at $T(x) = \dot{x} + ax$ er en lineæroperator, og at $2\cos\omega t = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}$. Hvis du synes dette blir grisete, kan du prøve å sette $\cos\omega t$ rett i formelen øverst på siden. Det blir verre.)

Hvis du ser på førsteintegralene til lotkavolterra og pendellikningen, vil forhåpentligvis se at det er den samme oppskriften som er brukt; herj litt med likningen på riktig måte og integrer ved en av formlene. Forskjellen er at man må bruke kjerneregelen istedet for produktregelen og at prosessen ikke produserer en løsning, men en algebraisk kurve som løsningen må ligge på.

$\boxed{0}$ Gjør oppgave 2 og 5 fra den økten på nytt og se om du skjønner det bedre nå.

Den samme teknikken kan brukes på høyere ordens differensiallikninger, men det er mer herk, så jeg har lagt det inn i "ukens nøtter" inntil videre; jeg er ikke sikker på om det er lettere å lære på denne måten enn gjennom homogene og inhomogene løsninger.

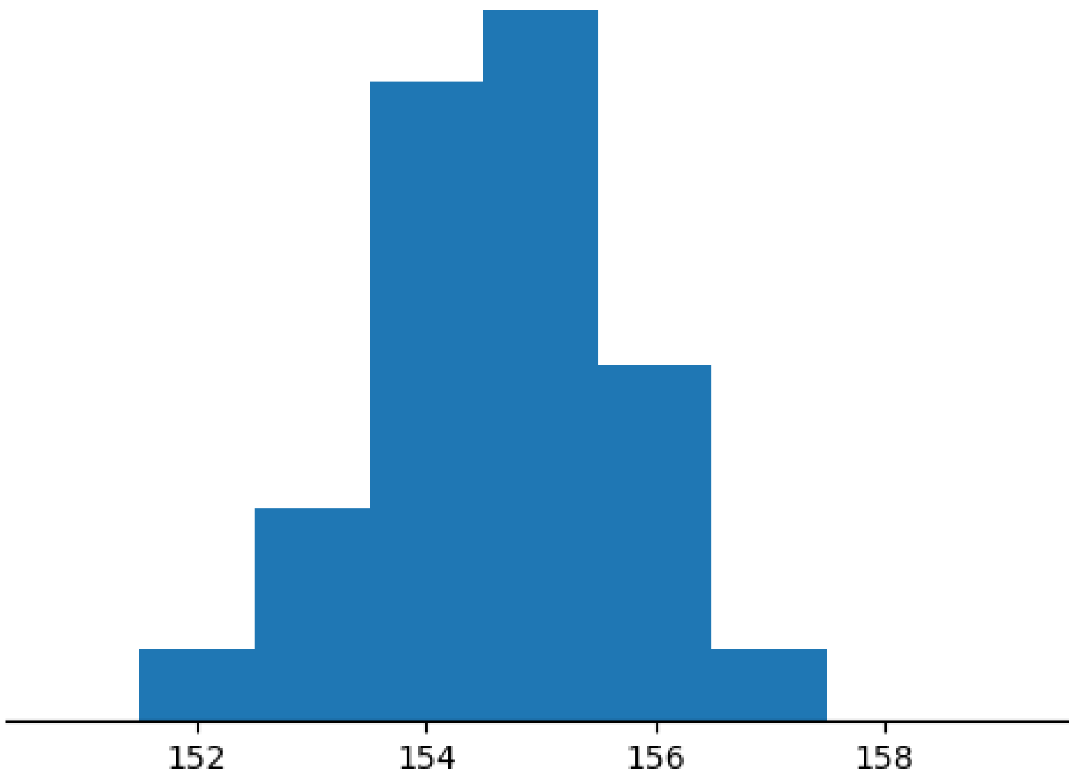
Nå skal vi videre med selve integralet. Målet med vitenskap er som sagt prediksjon. Under gitte forutsetninger ønsker vi å være helt sikker på hva som kommer til å skje. Men av og til plages vi, selv i verdens rikeste land, av *tings iboende uforutsigbarhet*. Dette kan skyldes forskjellige ting, for eksempel manglende kunnskap om grunnleggende mekanismer, slik som for mange kjemiske reaksjoner i kroppen din, eller Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, som sier at det ikke er mulig å kjenne en liten partikkels nøyaktige posisjon samtidig som du kjenner dens nøyaktige bevegelsesmengde. Eller det kan være mer mundant, slik som at hvis du skal bygge kai og har bestilt sekstoms bord, så er de nok ikke nøyaktig 152.4 mm, men kanskje alt mellom 152mm og 157mm.
I slike tilfeller må vi til med **sannsynlighetsregning**. Jeg fiksa kaien til svigers i sommer, og målte den faktiske bredden (til nærmeste millimeter) på alle de tjueni sekstomsbordene som var bestilt. Gjennomsnittsbredden var $\mu = 154.6$ mm, og det empiriske standardavviket på $\sigma = 1.1$ mm.[a]

1	154
2	154
3	153
4	156
5	155
6	153
7	154
8	155
9	153
10	154
11	155
12	155
13	154
14	156
15	155
16	154
17	155
18	154
19	154
20	156
21	155
22	154
23	155
24	157
25	152
26	155
27	156
28	155
29	156

1 Plott funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

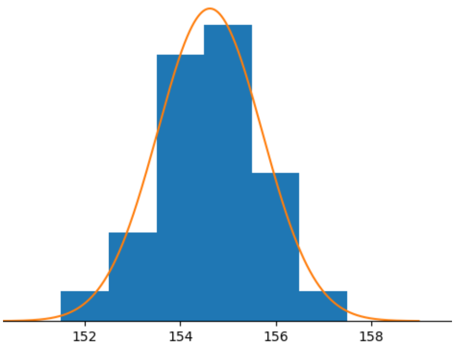
oppå histogrammet over relative frekvenser, altså antall bord av hver lengde delt på totalt antall bord.
(Du finner dataene som .csv-fil her: `https://folk.ntnu.no/mortano/python/kai`.)



[a]`https://tma4245.math.ntnu.no/deskriptiv-statistikk/`

Hvis du gjorde oppgaven over riktig, fikk du et plot som så omtrent ut som det til høyre. Kurven f kalles **normalfordelingskurven**,[a] og er et eksempel på noe som kalles **sannsynlighetstetthetsfunksjon**.[b] Dette kommer for fullt rett etter jul i et fag som heter TMA4245. For oss er det nok å vite at man finner sannsynligheter ved å integrere sannsynlighetstetthetsfunksjonen:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
[b] https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function

Uttrykket $P(a < X < b)$ leses som "sannsynligheten for at du trekker noe mellom a og b", og du kan tenke på det som sannsynligheten for å trekke et bord med en lengde i intervallet $[a, b]$ dersom du trekker et tilfeldig bord av stabelen.

Dersom $\mu = 0$ og $\sigma = 1$, får vi **standardnormalfordelingen**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Dette er den man stort sett bruker. Vi er opptatt av den på grunn av følgende oppgave.

$\boxed{2}$ Prøv å finne arealet under standardnormalfordelingskurven mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Du har antagelig i ryggraden din at man antideriverer for å finne arealet under kurven. Men i mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Standardnormalfordelingen har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en enkel måte, og tilforlatelige funksjonsuttrykk kan ha så kompliserte antideriverte at man kan miste interessen for livet:

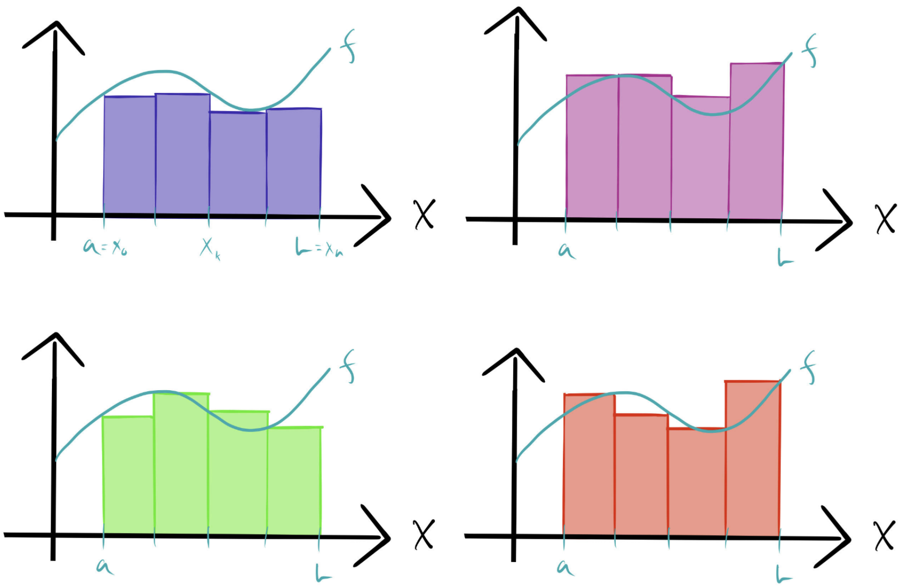
$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)}\,dx = \\
&-\Bigg(\Bigg(\log(\cos(x))\Bigg(2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)-(1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) + \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+(1+i)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+(1-i)\right)\right) + \\
&\quad \log^2\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + \\
&\quad 4\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log(4)\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(1-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\log\left(1+i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad \log(4)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \Big/ \\
&\left(4\left(\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\right)\Bigg) + \text{constant}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ Finn ut hva en riemannsum er i Arnes bok (kapittel 3.2), og løs forrige oppgave med en slik.

En **partisjon** av intervallet $[a, b]$, er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i, der $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Hvis avstanden mellom delingspunktene er den samme overalt, sier vi at partisjonen er **jevn**. Punktene er da gitt ved formelen

$$x_k = a + hk$$

der $h = \frac{b-a}{n}$ kalles **gitterfinheten**. En **riemannsum** er et histogram, der histogramhøyden er funksjonshøyden ett eller annet sted på intervallene i partisjonen. Det finnes flere typer riemannsummer, alt etter hvor på intervallene man setter histogramhøyden.[3]



Hvis man skal definere integralet presist, er man mest opptatt maksimums- og minimumsverdiene til f på hvert intervall. Er man bare ute etter arealet under grafen, er det mest praktisk med endepunktene på hvert intervall. Disse kalles henholdsvis, øvre, nedre, høyre og venstre riemannsum.

$\boxed{4}$ Hva er hva i figuren over?

Skal du forstå integralet, må du nesten forstå riemannsummer. Dette virker litt corny i begynnelsen, men i fysikk er det mange konsepter som er definert ved integraler, og for å forstå disse er det mye mye viktigere å forstå hva integralet er enn å ha svart belte i antiderivasjon.

$\boxed{5}$ Les litt mer om normalfordelingen, for eksempel i kapittel 5 her (gratis på gløsnettet):
`https://link.springer.com/book/10.1007/1-84628-168-7`
og skriv en pythonkode som tar inn a og b og returnerer $P(a < Z < b)$ ved riemannsummer. (Z istedet for X betyr at vi snakker om standardnormalfordelingen.)

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum`

I denne økten har jeg ambisjon om at du skal få med deg to ting - hvordan man beregner "arealet under kurven" uten å antiderivere, og at integralet kan brukes til veldig mye mer enn bare "arealet under kurven". Ved integrasjon finner vi alltid et areal under en eller annen kurve, men dette arealet kan fint være en lengde eller et volum eller et arbeid eller total ladning eller noe helt annet.

Men la oss begynne med å diskutere det første, nemlig hvordan man finner arealet under kurven uten å antiderivere. Det finnes mange viktige sannsynlighetsfordelinger som ikke kan antideriveres. Planckfordelingen

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

forteller noe som strålingsintensiteten for hver bølgelengde fra et svart legeme, og Maxwell-Boltzmann-fordelingen

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

forteller noe om fordelingen av hastighetene til partikler i en gasstank (noen partikler har høy fart, mens andre har lav fart).[4] Når du teller forskjeller i ACGT-sekvenser på kromosomenene dine trenger du noe som kalles betafordelingen.[5] Sannsynlighetsfordelinger dukker opp overalt i naturen.

I forrige oppgave skrev du en rutine for å beregne arealer under standardnormalfordelingen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}\,dx$$

Nå skal vi forske litt på bedre teknikker for å gjøre dette. Det finnes en femte type riemannsum som ikke står i figuren over. Den kalles **midtpunktriemannsum**, og kjennetegnes som du sikkert skjønner av at man tar funksjonsverdien på midtpunktet i hvert delintervall i partisjonen.

$\boxed{6}$ Lag en ny versjon av koden fra oppgave 5 der du bruker midtpunktriemannsummen istedet for høyre eller venstre riemannsum. Test alt på

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx \approx 0.341344746068542948585 2$$

og prøv forskjellige gitterfinheter. Ser du noe? Kan du forklare?

Tar du gjennomsnittet av høyre og venstre riemannsum får du noe som kalles **trapesmetoden**.[6]

$\boxed{7}$ Tegn opp og forklar hvorfor det heter "trapesmetoden".

$\boxed{8}$ Lag en ny versjon av koden fra oppgave 5 der du bruker trapesmetoden. Og test for forskjellige gitterfinheter. Hva ser du?

[4]https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution
[5]https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution
[6]https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule

En riemannsum er et histogram, og dersom f er integrerbar, går histogrammets totale areal mot integralet til f på $[a, b]$ når partisjonen blir finere. Integrerbarhet betyr bare at arealet under grafen er veldefinert; hvorvidt funksjonen er mulig å antiderivere, er irrelevant. Normalfordelingsfunksjonen e^{-x^2} er integrerbar selv om den ikke har noen pen antiderivert. En annen funksjon som ikke har noen pen antiderivert er sincfunksjonen. Denne er veldig veldig viktig i signalbehandling.[7]

$\boxed{8}$ Finn en tilnærming til

$$\int_0^{\pi} \text{sinc}(x)\, dx \approx 1.85193705196$$

ved å bruke både riemannsummer og trapesmetoden. [a] Sammenlikne nøyaktigheten mellom metodene når du bruker samme h.

[a] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function`

Hvis du sitter på en øde øy og trenger å finne arealet under en kurve til høy presisjon med penn og papir, kan du selvfølgelig bruke riemannsummer, men det finnes andre teknikker. [8] La oss se litt mer på **interpolasjon**. Hvis du har $n+1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der $x_j \neq x_k$ for alle $j \neq k$, vil det alltid være mulig å finne et polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hvis graf går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_k) = y_k$$

for $0 \leq k \leq n$. Disse likningene utgjør et $(n+1) \times (n+1)$-likningssystem for koeffisientene a_k:

$$\left.\begin{array}{ccccc|c} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 & y_0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 & y_n \end{array}\right.$$

kalt **vandermondesystemet**. La oss repetere litt fra forrige økt.

$\boxed{9}$ Finn koeffisientene til et annengradspolynom som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$.

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function`
[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration`

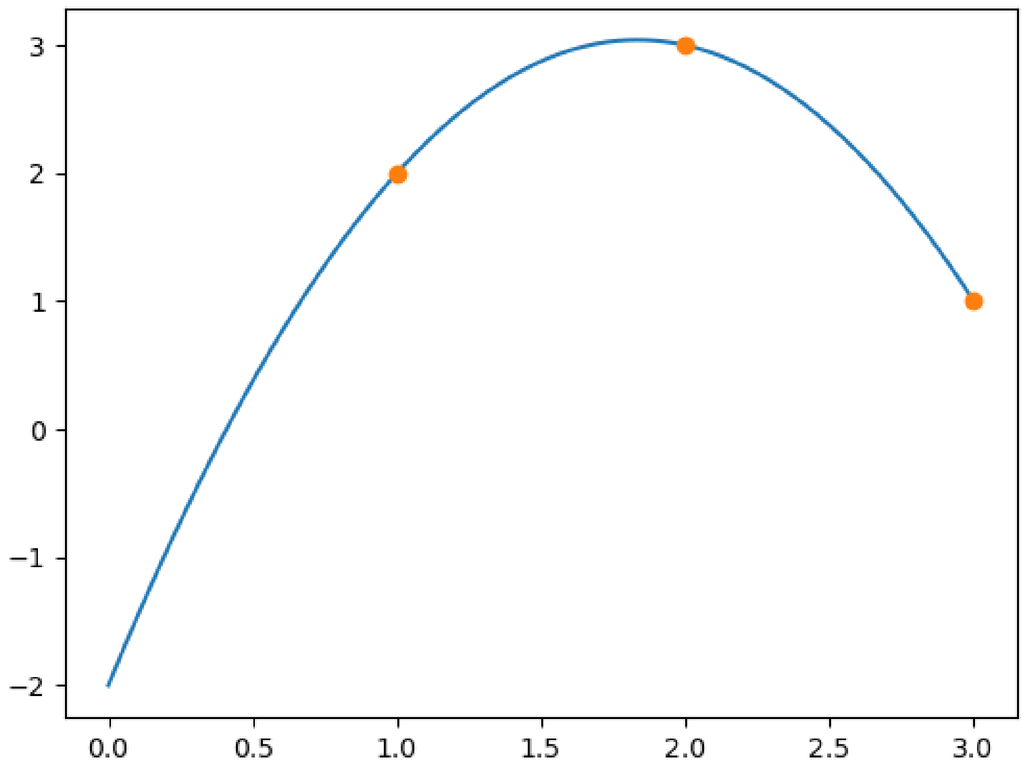
Dersom du skjønte hvordan oppgaven over skulle løses, brukte du likningene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 1$ til å sette opp vandermondesystemet

$$\begin{aligned} a + \quad b + c &= 2 \\ 4a + 2a + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

hvis løsning gir oss polynomet

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(-3x^2 + 11x - 4\right).$$

som ser slik ut:



Men vi slipper faktisk å plages med all denne gaussingen av vandermondesystemet, for vi kan heller gjøre som følger. For hvert punkt x_k, definerer vi et polynom

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$\boxed{10}$ Sjekk at polynomet $l_k(x)$ har orden n, og at det tilfredsstiller

$$l_k(x_m) = \begin{cases} 1 & \text{for } m = k \\ 0 & \text{for } m \neq k \end{cases}$$

Hvis du aksepterer oppgaven over, er det lett å se at

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

tilfredsstiller $p_n(x_k) = y_k$ for alle k. Polynomene l_k kalles **lagrangepolynomer**, og alt dette kalles **Lagranges interpolasjonsmetode**. Det er også ikke veldig vanskelig å se at det alltid finnes et entydig interpolasjonspolynom av maksimal grad n dersom $x_k \neq x_j$ for alle $k \neq j$. [9]

$\boxed{11}$ Finn et tredjegradspolyom som går gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ og $(3, 2)$.

Lagrangepolynomene kan brukes til å finne en approksimasjon til

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Vi deler $[a, b]$ i et eller annet gitter med $a = x_0$ og $b = x_n$, og skriver

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\,dx$$

Integralene

$$w_k = \int_a^b l_k(x)\,dx$$

kalles **vektene** og er trivielle å beregne siden l_k er polynomer. Formelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kalles en **kvadraturregel**.

$\boxed{12}$ Hvis du tar $n = 1$ i formelen over, får du en metode du allerede kan. Hvilken?

[9]Hvis vi antar at det finnes to forskjellige polynomer p_n og q_n av grad n som interpolerer den samme tabellen, og evaluerer differansen $p_n - q_n$ i punktene x_k, ser vi at

$$p_n(x_k) - q_n(x_k) = 0 \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Polynomet $p - q$ har maksimal grad n, og kan maksimalt ha n nullpunkter, så derfor må $p = q$.

For $n = 1$ får man trapesregelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Det finnes mange mange kvadraturregler, og vi har i bunn og grunn bare en ting å variere på, nemlig gitteret. For høyere presisjon kan vi skru opp n og variere på hvordan gitterpunktene er fordelt på $[a, b]$. Når partisjonen er jevn kalles det **Newton-Cotes-kvadratur**,[10] er gitteret er nullpunktene til chebyshevpolynomene, får du **clenshawcurtiskvadratur**,[11] og dersom det er nullpunktene til legendrepolynomene, får du **gausskvadratur**.[12] Newton-Cotes for $n = 2$ er for eksempel en klassiker og kalles Simpsons metode:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f\Big(\frac{b+a}{2}\Big)+f(b)\Big)$$

Dette er en veldig populær metode, spesielt på eksamen i et typisk førstesemesteremne i ingeniørmatematikk på universitet. (Jeg bryr meg ikke så mye om den; det finnes bedre metoder.)

$\boxed{13}$ Utled Simpsons metode ved å finne lagrangepolynomene til gitteret

$$\Big\{a, \frac{a+b}{2}, b\Big\}$$

og integrere dem.

$\boxed{14}$ Finn en integrasjonsrutine og beregn

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$$

til høyest mulig presisjon. Alt er lov. Fordelen med å gjøre det i et ordentlig språk som C++, FORTRAN eller RUST, er at for-løkker går kjapt. RUST har til og med innebygget funksjonalitet for parallellisering.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Cotes_formulas
[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Clenshaw-Curtis_quadrature
[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature

Vi har tidligere studert numeriske metoder for å løse differensiallikninger. Hvis man skjønner metodene for numerisk integrasjon, kan man lære seg en enkel tommelfingerregel:
For en hver numerisk integrasjonsrutine finnes det en korresponderende metode for å løse ordinære differensiallikninger.
Trikset for å skjønne dette er enkelt. La oss si vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$\dot{x} = f(x) \qquad x(0) = 0$$

på intervallet $[0, T]$. Vi deler tidsintervallet inn i en partisjon med n punkter

$$t_k = kh \qquad 0 \leq k \leq n$$

der $h = T/n$, og integrerer den uløselige differensiallikningen fra et gitterpunkt til neste:

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t))\, dt$$

Hvis vi setter inn en enkelt rektangulær riemannboks eller trapesmetoden for integralet på høyresiden, og så setter inn approksimasjonen $x_k \approx x(t_k)$ overalt, får vi nå fire metoder på rappen:

$$\begin{aligned}
\text{Eksplisitt Euler:} \qquad & x_{k+1} = x_k + hf(x_k) \\
\text{Implisitt Euler:} \qquad & x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}) \\
\text{Midtpunktmetoden:} \qquad & x_{k+1} = x_k + hf\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \\
\text{Trapesetoden:} \qquad & x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right)
\end{aligned}$$

Jeg kunne bedt deg om å fundere på hvilken som korresponderte til hvilken, men de avsløres jo av navnene. Hvis du setter eksplisitt euler inn for x_{k+1} på høyresiden i trapesmetoden, får du noe som kalles

$$\text{Heuns metode:} \qquad x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k) + f(x_k + hf(x_k))\right)$$

Det samme kan gjøres med midtpunktmetoden; da får du noe som kalles den eksplisitte midtpunktmetoden. Det finnes faktisk en uendelig stor klasse av forskjellige metoder, kalt **rungekuttametoder**, som alle er variasjoner og generaliseringer av disse metodene.[13] Bruker du Simpsons metode på integralet på høyre side og setter inn noen approksimasjoner slik som dem som gir Heuns metode fra trapesmetoden, får du den kjente RK4. Nå kan du teste disse metodene på

$\boxed{15}$ Ecoliproblemet: $\dot{x} = x \quad x(0) = 1$ $\boxed{16}$ Fallskjermproblemet: $\dot{v} = 1 - v^2 \quad v(0) = 0$

og sammenlikne med analytisk løsning. Trenger du hjelp med å komme igang, finner du kode her: `https://folk.ntnu.no/mortano/fallskjerm/`

[13] `https://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods`

Vi kan jo ta en til når vi først er igang.

$\boxed{17}$ Løs Newtons avkjølingsproblem

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \qquad\qquad T(0) = \frac{1}{10}$$

med Eulers ekspisitte metode

$$T_{n+1} = T_n + h(2 - T_n)$$

og med trapesmetoden

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{2}(2 - T_n + 2 - T_{n+1})$$

og plott begge i samme plott som den analytiske løsningen

$$T(t) = 2 - \frac{19}{10}e^{-t}.$$

Bruk et litt grovt tidssteg, for eksempel $h = 0.1$. Kan du forklare hvorfor trapesmetoden approksimerer den analytiske løsningen mye bedre enn Eulers eksplisitte metode?

Viggo Brun [14] skal ha sagt: "Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!"

Det han mente å si, var nok at derivasjon er ganske lett (det er bare å bruke noen regneregler), mens antiderivasjon kan være ganske vanskelig. Man kan bruke et liv på å trene på antiderivasjon. Et tilforlatelig funksjonsuttrykk kan være enten lett eller vanskelig eller fullstendig håpløst å antiderivere, og det er ofte umulig å avgjøre hvilken av disse som er tilfellet før man har prøvd. Kanskje er det til og med lett, men man kan ikke akkurat det trikset som må brukes; jeg har opplevd å gjøre et integral så mange ganger i forelesning at jeg kan det i søvne, for så å ikke ha noen erindringer overhodet om hva trikset er bare noen få år senere.

Men hvis du kombinerer alt du har lært denne uken med antiderivasjonsreglene du lærte på skolen, har du en grei verktøykasse å jobbe med om du må beregne kompliserte arealer. Nå skal vi se på hva disse arealene kan tolkes som. Integralet dukker opp overalt i anvendelser, og det er ofte mye lettere å forstå anvendelsene om man forstår integralet.
Integrals hemmelighet avsløres ved å se på benevningen i den avhengige og uavhengige variabelen, gange dem sammen og se hva man får.

For å forstå dette er det nok lurest å dra gjennom masse eksempler. La oss begynne med noe du allerede kan fra gymnaset. Volumet av omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x)$ en gang om x-aksen, er gitt ved

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Dette er fordi $g(x) = \pi f^2(x)$ er en funksjon som gir arealet av et tverrsnitt. Når vi integrerer g, tolkes *høyden i riemannhistogrammet som et areal*, og når vi så ganger med basen til histogrammet (som tolkes som lengde), blir resultatet et volum.

$\boxed{18}$ Drei litt på en bit av sinuskurven, for eksempel mellom to av nullpunktene, og finn volumet.

$\boxed{19}$ Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3}r^3$.

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Viggo_Brun

Arbeid er en annen klassiker. I fysikken på skolen lærte du antagelig at arbeid er lik kraft ganger vei. Men i skolefysikk gjerne kraften konstant, slik at du kan gange kraft med vei og få arbeidet. I det virkelige liv endrer kraften seg hele tiden, og da må vi selvfølgelig integrere:

$$\text{arbeid} = \int F dx$$

Jeg anbefaler en titt her: `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_13.html`

$\boxed{\text{20-1}}$ Institutt for fysikk har målt tyngdeakselerasjonen $g \approx 9.8214675$ i kjelleren på realfagsbygget. Du hopper fra femmeteren på pirbadet. Hvor stort arbeid gjør tyngden på deg frem til du treffer vannspeilet?

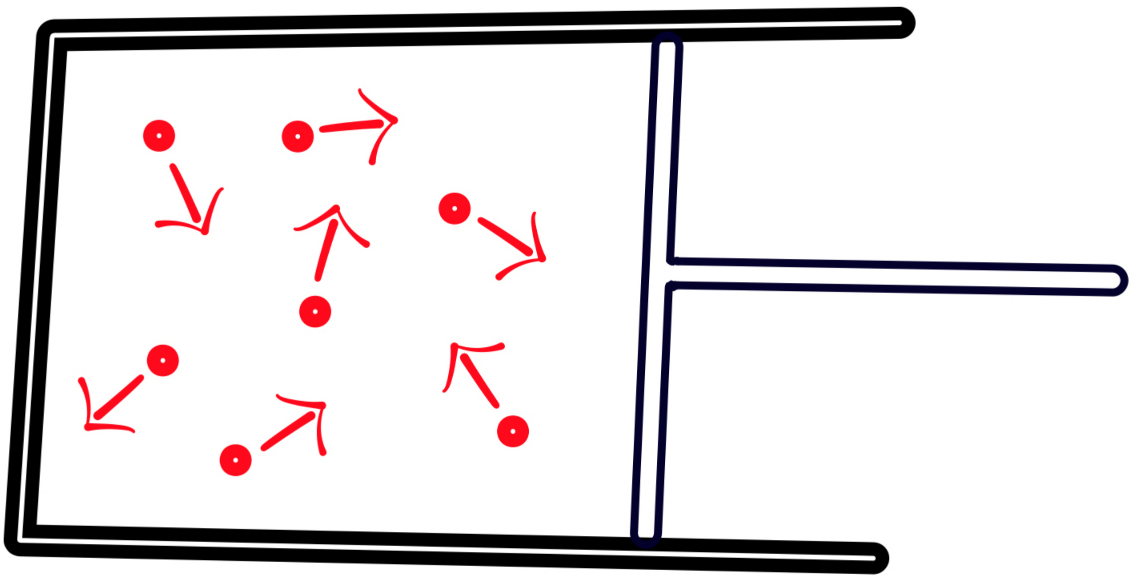
$\boxed{\text{20-2}}$ Newtons gravitasjonslov sier at gravitasjonskraften på deg er

$$F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

der $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ er den universelle gravitasjonskonstanten, m_1 er jordens masse, og m_2 er din masse, og r din avstand fra jordens sentrum. Alan Eustace [15] hoppet i 2014 i fallskjerm fra en høyde på nesten 42 km. Hvor stort arbeid gjorde tyngden på ham?
(Du kan for øvrig se video av Felix Baumgartners 2012-rekord fra 39 km på youtube.)

$\boxed{\text{20-3}}$ Hva er tyngdeakselerasjonen 42 km opp? Hvor stor relativ feil gjør du i forrige oppgave dersom du antar $g \approx 9.8214675$ hele veien fra 42 km oppe og ned til bakken?
(Relativ feil er feilen delt på størrelsen det er snakk om. Relativ feil er viktig; hvis du måler avstanden bort til sidemannen og bommer med en meter, er det en ganske dårlig måling, men hvis du måler avstanden til månen og bommer med en meter, er det ganske bra.)

$\boxed{21}$ Et beholder med et stempel inneholder en ideel gass. Vi tilfører varme, men lar gassen ekspandere slik at temperaturen holdes konstant. Hva er arbeidet stempelet gjør på omgivelsene når volumet går fra V_1 til V_2?

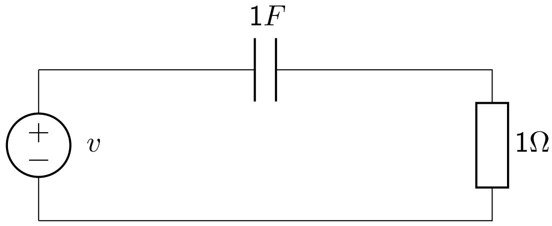


[15] `https://en.wikipedia.org/wiki/Space_diving`

Hvis basen i riemannsumhistogrammet er et tidsintervall på t-aksen, og $i(t)$ strømstyrke som funksjon av tiden. blir histogramhøyden litt ladning, og

$$\int_a^b i(t)\,dt$$

total ladning mellom tidspunktene $t = a$ og $t = b$. La oss si at spenningskilden i kretsen har stått på en god stund slik at kondensatoren blir ladet opp, og så blir spenningskilden slått av ved $t = 0$ slik at $i(0) = 1$.



$\boxed{22}$ Hvor mye ladning har passert gjennom motstanden når kondensatoren er utladet?

Den siste oppgaven introduserer noe som kalles **uegentlige integraler**. Dette er integraler der den ene integrasjonsgrensen er ∞ eller integraler der integranden blåser opp et eller annet sted i integrasjonsområdet, for eksempel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1 \qquad \text{eller} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

Her seks klassikere:

$\boxed{23}$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ $\boxed{24}$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\boxed{25}$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$\boxed{26}$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$ $\boxed{27}$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\boxed{28}$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Hvis du dreier $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 1/x$ om x-aksen, får du "Gabriels trompet".

$\boxed{29}$ Finn volumet til Gabriels trompet.

Den siste anvendelsen vi skal ta er litt mer subtil, nemlig buelengde. Lengden av grafen til f fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ er

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Dette er subtilt fordi integranden $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ er en benevningsløs faktor som angir forholdet mellom lengde på en bitteliten bit av x-aksen og en bitteliten bit av kurven (dersom både x og $f(x)$ måles i meter). Kurvelengdekonseptet blir veldig viktig om et års tid når vi skal lære om integrasjon av funksjoner av flere variable, men la oss venne oss til det allerede nå.

$\boxed{30}$ Finn buelengden til $y = x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$.
(Denne går med et nødskrik med penn og papir.)

Likningen for en sirkel er

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{eller} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

om du vil. En generalisering av denne er likningen for en ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Punktene som passer i denne likningen ligger på en ellipse som er sentrert i origo og har halvakser a og b. Planetene går stort sett rundt solen i ellipsebaner.[16]

$\boxed{31}$ Finn omkretsen av en ellipse med halvakser 1 og 2.
(Denne går ikke med penn og papir. Prøv både riemannsummer og trapesmetoden.)

$\boxed{32}$ Finn lengden av en periode av sinuskurven. (Dette integralet kan heller ikke beregnes analytisk.)

Kombinerer du buelengdeformelen med omdreiningslegeme, får du formelen for overflatearealet til et legeme som er fremkommet ved å dreie $f > 0$ om x-aksen:

$$\text{overflateareal} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\boxed{33}$ Finn overflatearealet til Gabriels trompet.

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

Helt på tampen tror jeg vi tar en lavthengende frukt, nemlig dobbeltintegraler. Grunnen er at dette kommer ganske tidlig i TMA4245 etter juleferien, og det er ikke så vanskelig, men kan være greit å ha sett. Fra økten i uke 35 vet du at du skal tenke på grafen til $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som taket i et hus med grunnflate gitt ved $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Integralet

$$\iint_\Omega f$$

kan du tenke på som volumet av huset. Dersom Ω er et rektangel er ikke dette vanskelig å utføre, og har du skjønt omdreiningslegemer, bør det går greit å skjønne oppskriften. La oss finne volumet under $f(x, y) = xy$, der Ω er rektangelet avgrenset av $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 2$. Vi uttrykker våre følelser for Ω ved å skrive

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$$

som kalles et **kartesisk produkt**, og integralet blir

$$\iint_\Omega f = \int_0^2 \int_0^1 xy \, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy \, dx \right) dy.$$

Dette kalles et **iterert integral**, for det er et integral inni et annet integral.

Først tar vi det innerste integralet. Det er med hensyn på x, fordi dx står innerst. Vi går fremad med samme taktikk som ved partiellderivasjon; man integrerer med hensyn på x, og later som om y er en konstant:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 xy \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot y \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \, dy$$

Tolkningen av det innerste integralet er nå i samme gate som integranden i omdreiningslegemer; vi har regnet ut arealet av et tverrsnitt. Tenk at du for hver y-verdi har saget volumet i to med en motorsag, parallelt med x-aksen. Funksjonen

$$\int_0^1 xy \, dx = \frac{1}{2} y,$$

altså det innerste integralet, gir arealet av dette tverrsnittet. Hvis du skjønte omdreiningslegemer i R2, skjønte du forhåpentligvis at dersom man har en funksjon som beskriver arealet av tverrsnittet av et volum, finner man det totale volumet ved å integrere tverrsnittsfunksjonen:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 y \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = 1$$

Prøv selv nå. Beregn

$\boxed{34}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^3 x + 2y \, dx \, dy$ $\boxed{35}$ $\displaystyle\int_0^3 \int_0^1 x + 2y \, dx \, dy$ $\boxed{36}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 2 + \frac{xy}{10} \, dx \, dy$

UKENS NØTTER

Du kan også løse andreordens likninger med den generiske strategien for å løse differensiallikninger, men det er litt mer jobb. Jeg illustrerer med et eksempel, la oss ta

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0.$$

Det karakteristiske polynomet $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ har en dobbel rot $\lambda = 1$, og den korrekte herjingen er å gange med e^t:

$$e^t\left(\ddot{x} + 2\dot{x} + x\right) = 0$$

og observere at likningen nå kan skrives

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^t x(t)\right) = 0.$$

Denne er bare å integrere to ganger, slik at vi får

$$e^t x(t) = c_1 t + c_2$$

eller

$$x(t) = e^{-t}\left(c_1 t + c_2\right),$$

som er korrekt løsning. Nå brukte jeg det ubestemte integralet for å spare litt griseri.

$\boxed{0}$ Prøv å etterape trikset over til å hoste opp løsningen til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

der $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Det er litt mer herk, du må faktorisere likningen slik:

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)x = 0$$

og så bruke førsteordenstrikset to ganger, først på

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)y(t) = 0 \qquad \text{der} \qquad y(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)x(t)$$

og så på nytt på likningen for y.

Løsningsformelen

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{au} g(u)\, du\right)$$

til

$$\dot{x}(t) + ax(t) = g(t) \qquad x(0) = x_0$$

kan generaliseres til en formel for problemet

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = g(t) \qquad x(0) = x_0$$

altså for a som ikke er konstante. Dette kalles **integrerende faktor** i Arnes bok.

$\boxed{1}$ Prøv.

Her er noen integralklassikere.

$\boxed{2}$ Utled formelen

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

for volumet som fremkommer ved å dreie f om y-aksen.
(Dette kalles **sylinderskallmetoden**. Hvorfor?)

$\boxed{3}$ Et eksempel på en funksjon som faktisk ikke er integrerbar, er

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Forklar hvorfor.

$\boxed{4}$ Vis at arealet til en ellipse med halvakser a og b er πab.
(Denne går an med penn og papir.)

$\boxed{5}$ Hva med $(1+x^2)^{1/3}$ da, klarer du å antiderivere den?

$\boxed{6}$ Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx.$$

$\boxed{7}$ Du kan prøve å integrere Planckfordelingen:

$$\int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} T^4$$

men da skal du nok få svette ganske bra.

LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{-4}$ Det blir det samme. Steg 1 er å gange med e^{at}:

$$e^{at}\left(\dot{x}(t) + ax(t)\right) = e^{at}x(t)$$

og så observere at

$$e^{at}\left(\dot{x} + ax\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{at}x\right)$$

slik at vi får

$$\frac{d}{dt}\left(e^{at}x\right) = e^{at}x(t).$$

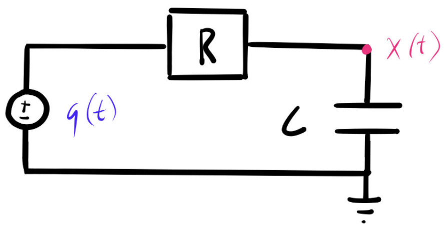
Så bruker vi analysens fundamentalteorem med $f(t) = e^{at}x(t)$, $a = 0$ og $b = t$, og får

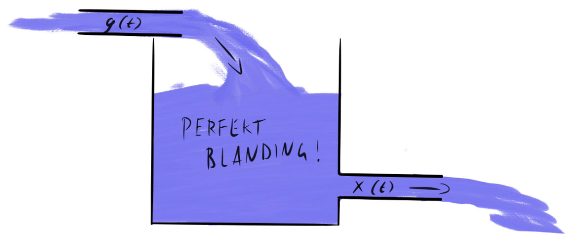
$$e^{at}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{au}x(u)\,du,$$

som sammen med $x(0) = x_0$ gir

$$x(t) = x_0e^{-at} + e^{-at}\int_0^t e^{au}x(u)\,du.$$

Her er to fysiske situasjoner som gir opphav til denne differensiallikningen:





Du kan tenke på $x(t)$ som spenningen over kondensatoren når spenningskilden er $g(t)$, eller som konsentrasjonen ut av en perfekt blandetank når konsentrasjonen inn er gitt ved $g(t)$. (Tenk at g styres av en mann i et kontrollrom, og så vil du beregne hva slags konsentrasjon x som kommer ut av tanken. Hvis $g = 0$ er det rent vann som kommer inn.)

De tre neste oppgavene regna jeg feil på mange ganger selv, og fikk mye kjeft av Even. Som belønning skal han få løsningene sine på trykk.

$\boxed{-3}$

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + c\int_0^t e^{au}\,du\right)$$

$$= e^{-at}\left(x_0 + c\cdot\frac{1}{a}\left[e^{at} - 1\right]\right)$$

$$= e^{-at}x_0 + \cancel{e^{-at}}\cdot c\cdot\frac{1}{a}\cdot\cancel{e^{at}} - e^{-at}\cdot c\cdot\frac{1}{a}$$

$$= e^{-at}x_0 + \frac{c}{a} - e^{-at}\cdot\frac{c}{a} = \underline{\underline{\left(x_0 - \frac{c}{a}\right)e^{-at} + \frac{c}{a}}}$$

-2

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{au} e^{su}\, du\right)$$

$$= e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{(a+s)u}\, du\right)$$

$$= e^{-at}\left(x_0 + \frac{1}{a+s}\left[e^{(a+s)t} - 1\right]\right)$$

$$= e^{-at} x_0 + \frac{1}{a+s} e^{-at}\left(e^{at} e^{st} - 1\right)$$

$$= e^{-at} x_0 + \frac{1}{a+s} e^{st} - \frac{1}{a+s} e^{-at} = \left(x_0 - \frac{1}{a+s}\right) e^{-at} + \frac{1}{a+s} e^{st}$$

-1

$$\dot{x}(t) + ax(t) = \cos(\omega t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{au} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\omega u} + e^{-i\omega u}\right) du\right)$$

$$= e^{-at}\left(x_0 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{(a+i\omega)u}\, du + \frac{1}{2}\int_0^t e^{(a-i\omega)u}\, du\right)$$

$$= e^{-at}\left[x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+i\omega}\left(e^{at} e^{i\omega t} - 1\right) + \frac{1}{a-i\omega}\left(e^{at} e^{-i\omega t} - 1\right)\right)\right]$$

$$= x_0 e^{-at} + \frac{1}{2}\left[H(i\omega)\left(e^{i\omega t} - e^{-at}\right) + H(-i\omega)\left(e^{-i\omega t} - e^{-at}\right)\right]$$

$$= x_0 e^{-at} + \frac{1}{2}\left[H(i\omega)\left(e^{i\omega t} - e^{-at}\right) + H(-i\omega)\left(e^{-i\omega t} - e^{-at}\right)\right]$$

$$= x_0 e^{-at} + \frac{1}{2} H(i\omega) e^{i\omega t} - \frac{1}{2} H(i\omega) e^{-at} + \frac{1}{2} H(-i\omega) e^{-i\omega t} - \frac{1}{2} H(-i\omega) e^{-at}$$

$$= \left[x_0 - \frac{1}{2}\left(H(i\omega) + H(-i\omega)\right)\right] e^{-at} + \frac{1}{2}\left(H(i\omega) e^{i\omega t} + H(-i\omega) e^{-i\omega t}\right)$$

$\boxed{2}$ Poenget med dette er at e^{-x^2} ikke kan antideriveres slik du er vant til. Litt som med dottieproblemet $x = \cos x$ eller pendellikningen $\ddot{q} + \sin q = 0$, må vi ty til andre teknikker. Hvis du vil lese dette i en mer pålitelig kilde enn meg, kan du lese kap. 3.6 i Arnes bok.

$\boxed{4}$ De øverste er nedre og øvre, mens de nederste er venstre og høyre. Beklager om du er blant de femten prosentene som lider av LFC.[17]

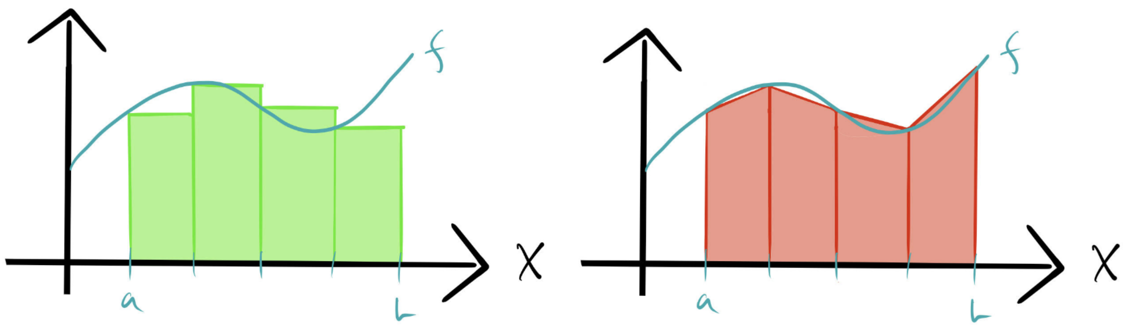
$\boxed{8}$ I denne mappen:
`https://folk.ntnu.no/mortano/normalfordelingen/`
finner du litt forskjellig.

Trapesmetoden er implementert på to forskjellige måter i trapes.py, slik at du kan se med egne øyne hvor inni hampen ineffektivt det er å kjøre for-løkker i python. (Koden regner ut arealet mellom μ og b standardavvik over μ. Siden normalfordelingen er speilingssymmetrisk om aksen $x = \mu$, er dette i bunn og grunn alt man trenger.)

Det finnes også rustkode for trapesmetoden. Med denne kan få se med egne øyne at i et "ordentlig" språk (altså et språk som er skrevet for tallknusing heller enn brukervennlighet), er det gjerne motsatt; for-løkker er helt sykt kjapt. Nyt også hvor lett det er å parallellisere i rust. (Takk til Gudbrand.)

I mappen finnes også et par andre koder basert på mer avanserte strategier for å beregne arealet under grafen numerisk. Dette kommer vi tilbake til.

Jeg har ikke implementert midtpunktmetoden eller riemannsummer, men jeg lover at både midtpunkt- og trapesmetoden kommer til å gi mer nøyaktige svar enn riemannsummene. Dette bør være klart om du tegner opp. Følgende figur sammenlikner trapesmetoden (høyre) og venstre riemannsum (venstre):



Du klarer sikkert å lage en tilsvarende figur for midtpunktmetoden.

$\boxed{8}$ Denne heter også oppgave 8 fordi det er den samme oppgaven som oppgave 8.

$\boxed{9}$ Denne gjorde jeg i forelesning.

$\boxed{10}$ Symbolet Π (store pi) betyr produkt, og funker på samme måte som Σ bare med produkt istedet for sum. Hvis du synes det er uvant og tenke på dette symbolet, viste jeg et eksplisitt

[17] `https://en.wikipedia.org/wiki/Left-right_confusion`

eksempel på konstruksjon av lagrangefunksjoner i forelesning. Det er ikke så vanskelig som det ser ut.

$\boxed{11}$ Dette er altså bare å skrive opp:

$$\begin{aligned}
p(x) =& 1 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x) + 2 \cdot l_3(x) \\
=& 1 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-2}{0-3} \\
&+ 0 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \\
&+ 1 \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} \\
&+ 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}
\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Hvis du ser nøye på en figur av trapesmetoden (for eksempel i lf til oppgave 8) samt skjønner hva interpolasjon handler om, vil du se at trapesmetoden er konstruert ved å interpolere med et første ordens polynom på hvert delintervall.

$\boxed{13}$ Her er det bare å brette opp ermene. Interpolasjonspolynomet er

$$\begin{aligned}
p(x) = & f(a) \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{a-b} \\
&+ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{x-a}{\frac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{x-b}{\frac{a+b}{2} - b} \\
&+ f(b) \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{b-a}
\end{aligned}$$

Å beregne integralene ser kjedelig ut, men litt smart bruk av produktregelen gjør alt mye enklere. Vi beregner

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\ dx =& \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2 \\
=& -\frac{1}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)^2 - \frac{1}{6}(b-a)^3 \\
=& \frac{1}{4}(b-a)^3 - \frac{1}{6}(b-a)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(x-b)\ dx =& \frac{1}{2}(x-a)(x-b)^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2\ dx \\
=& -\frac{1}{6}(b-a)^3 .
\end{aligned}$$

Den observante student vil nå innse at

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\,dx = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

siden $\frac{a+b}{2}$ ligger midt mellom a og b og de to integrandene er symmetriske om dette punktet. (Men regn det ut om du ikke tror meg; beregningen blir omtrent den samme. Jeg beregna først og oppdaget symmetrien etterpå.)

Simpsons regel blir altså

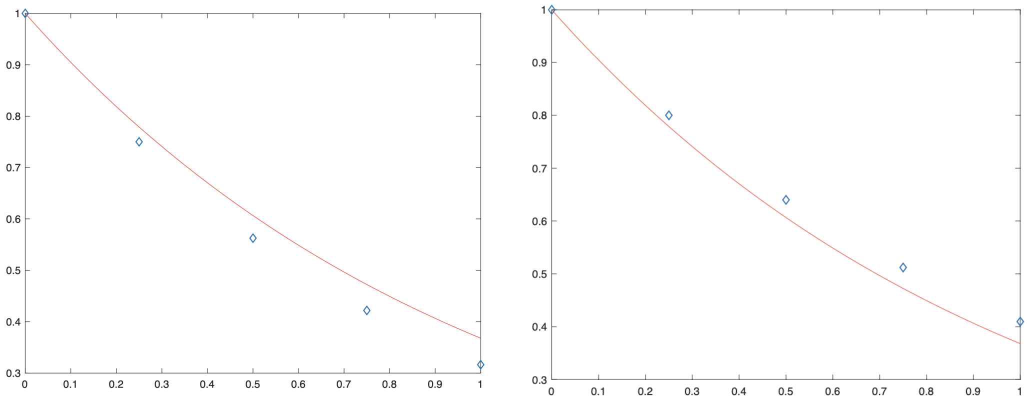
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \approx{}& f(a)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{1}{a-\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{a-b} \\
&- f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}(b-a)^3\frac{1}{\frac{a+b}{2}-a}\cdot\frac{1}{\frac{a+b}{2}-b} \\
&+ f(b)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{1}{b-\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{a-b} \\
={}& f(a)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{a-b} \\
&- f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}(b-a)^3\frac{2}{b-a}\cdot\frac{2}{a-b} \\
&+ f(b)\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot\frac{2}{b-a}\cdot\frac{1}{b-a} \\
={}&\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)\right)
\end{aligned}$$

Herregud for en lang og kjedelig beregning. Definitivt en once in a lifetime experience å utlede Simpsons regel. Dette gjør jeg aldri igjen!

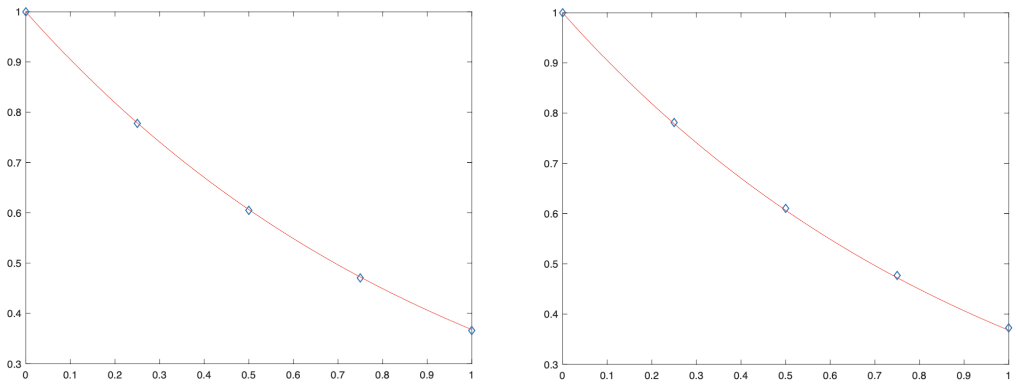
14 Det kjappeste jeg har fått til er en 40 nanosek, men det finnes folk i klassen over dere som har gjort det mye fortere. Gå på let etter en morsom fyr på elsys som heter Leo og spør ham.

Jeg integrerte maclaurinrekken ledd for ledd. Dette får du lære om i uke 46. Kode: `https://folk.ntnu.no/mortano/normalfordelingen/rust/maclaurin/`

15 Dette gjorde jeg i matlab for noen år siden, riktignok med motsatt fortegn på proporsjonalitetskonstanten i likningen, men prinsippet blir det samme. Her er Euler eksplisitt og implisitt (heltrukken linje er analytisk løsning, mens diamanter er numerisk):



og trapesmetoden og Heuns metode:



Det er lett å se fra figurene at trapesmetoden og Heun gir bedre approksimasjoner for samme steglengde. Konklusjonene i oppgave 16 og 17 blir de samme.

18 Se "ukens repetisjon av R2" om hvordan man integrerer $\sin^2 x$ hvis du ikke husker det fra $R2$.

19 En sirkel med senter i origo og radius r har likning

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

så vi kan lage en kule ved å dreie $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

en gang om x-aksen, og beregne

$$V = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$\boxed{\text{20-1}}$ Hvis vi antar at tyngdeakselerasjonen i Pirbadet er konstant og den samme som i kjelleren på Realfagsbygget, er kraften mg, der m er din masse. Å integrere en konstant klarer alle barn i barnehagen; det er bare å gange konstanten med lengden av integrasjonsintervallet. Du kan altså finne arbeidet ved mgh der m er din masse og h er fem meter.

$\boxed{\text{20-2}}$ La oss først beregne

$$Gm_1m_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,dr=-Gm_1m_2\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2}=Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Jorden ikke formet som en kule. Den er i bunn og grunn mer pæreformet, og bredest noe sør for ekvator. Mt. Everest er ikke det punktet på overflaten som er lengst fra sentrum; dette punktet sitter i Andesfjellene et sted. Jeg kjenner ikke herr Eustace, men la oss for enkelhets skyld anta at han og drakten veier 100 kg. og at jorden $5.972\cdot 10^{24}$ kg tung perfekt kule med radius $6.371\cdot 10^6$ meter. Setter vi inn disse tallene, samt $r_1=6.371\cdot 10^6$ og $r_2=6.413\cdot 10^6$ og $G=6.674\cdot 10^{-11}$, får vi en joulekake på sånn ca $4.097\cdot 10^6$ Joule.

$\boxed{\text{20-3}}$ Tar vi mgh med $m=100$ kg, $g=9.821$ kg meter per sekund per sekund og $h=4.2\cdot 10^4$ km, får vi en joulekake på sånn ca $4.120\cdot 10^6$ Joule. Den relative feilen defineres av Encyclopedia Brittanica som "feil delt på sann verdi". Vi har jo strengt tatt ikke den sanne verdien, men om vi tar oppgave 20-2 som fasit, får vi

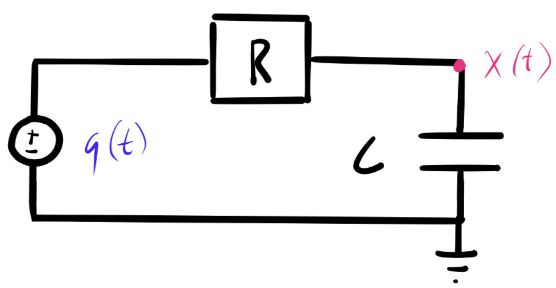
$$\text{relativ feil}=\left|\frac{4.097\cdot 10^6-4.120\cdot 10^6}{4.097\cdot 10^6}\right|=\left|\frac{4.097-4.120}{4.097}\right|\approx 0.005.$$

Ikke rare greiene, altså.

$\boxed{21}$ Her gjelder det å huske at trykk måles i newton per kvadratmeter, så når du ganger trykk med et lite voluminkrement (som måles i kubikkmeter), får du arbeidet trykket gjør når volumet økes bittelitt. Hvis trykket endres etterhvert som volumet endres, må vi selvfølgelig integrere for å finne arbeidet:

$$\int_{V_1}^{V_2}p\,(T,V)\,dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{NTk}{V}dV=NTk\,(\log V_2-\log V_1)=NTk\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$\boxed{22}$ La oss først sette opp en differensiallikning for spenningen over kondensatoren. Vi setter på en jord:



slik at Kirchhoffs spenningslov gir

$$RC\dot{x}(t)+x(t)=g(t).$$

Her må vi nesten anta at spenningskilden er konstant for å få et problem som er håndterbart i første semester. La oss si at spenningskilden har den konstante verdien V, slik at løsningen blir

$$x(t) = V + (x(0) - V)e^{-t/RC}.$$

Når $t \to \infty$, vil $x \to V$, og slik ser vi at etter lang tid vil spenningen over kondensatoren stabilisere seg på V. Vi kan nå koble sammen kretsen uten spenningskilde og la kondensatorene lade seg ut. Hvis strømmen er $i(t)$, gir Kirchoffs spenningslov nok en gang slik at

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\, ds = 0.$$

Siden spenningen idet vi kobler igang er V, gir denne likningen at

$$i(0) = V/R,$$

men ellers er likningen litt uhåndterbar. La oss derivere, og få

$$Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

som gir

$$i(t) = i(0)e^{-t/RC} = \frac{V}{R}e^{-t/RC}.$$

Strømmen begynner altså på V/R og dør gradvis ut. For å finne total ladning som har passer kondensatoren, beregner vi integralet

$$\int_0^\infty i(t)\, dt = \frac{V}{R}\int_0^\infty e^{-t/RC}\, dt = -CVe^{-t/RC}\Big|_0^\infty = CV.$$

$\boxed{23}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = (\ln|x|)_1^\infty = \infty$ $\boxed{24}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^\infty = 1$ $\boxed{25}$ $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = (2\sqrt{x})_1^\infty = \infty$

$\boxed{26}$ $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = (\ln|x|)_0^1 = \infty$ $\boxed{27}$ $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_0^1 = \infty$ $\boxed{28}$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = (2\sqrt{x})_0^1 = 2$

$\boxed{29}$ Her er det bare å gange svaret i oppgave 24 med π.

$\boxed{30}$ Vi beregner

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right)$$

$\boxed{30}$ Vi beregner

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right)$$

$\boxed{31\text{-}32}$ Du finner koder her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/kvadratur/buelengde/`

$\boxed{33}$ Overflatearealet til Gabriels trompet blir

$$2\pi \int_0^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

Dette integralet er ikke så lett å beregne, men vi trenger ikke det, for alle barn i barnehagen skjønner at siden $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \geq 1$, må

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Bruker du Gabriels trompet som malingsspann, rommer det π maling, men om du vil male den på utsiden, finnes det altså ikke nok maling i verden.

$\boxed{34}$ $$\int_0^1\int_0^3 x+2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2+2yx\right)_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^1 \frac{9}{2}+6y\,dy = \frac{9}{2}+3 = \frac{15}{2}$$

$\boxed{35}$ $$\int_0^3\int_0^1 x+2y\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^2+2yx\right)_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^3 \frac{1}{2}+2y\,dy = \frac{3}{2}+9 = \frac{21}{2}$$

$\boxed{36}$ $$\int_0^1\int_0^1 2+\frac{xy}{10}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(2x+\frac{x^2y}{20}\right)_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 2+\frac{y}{20}\,dy = 2+\frac{1}{40} = \frac{81}{40}$$

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Avgjør om integralet

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$$

konvergerer eller divergerer.

Løsning: Siden $\cos x \geq \cos 1 > 0$, og integranden er positiv på $[0,1]$, kan vi skrive

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx \geq \int_0^1 \frac{\cos 1}{x}\,dx \geq \cos(1)\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Integralet divergerer.

$\boxed{2}$ Finn et tredjeordens polynom som går gjennom punktene $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ og $(3,5)$. Skisser polynomet og punktene.

Løsning: Et tredjeordens polynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

der $a \neq 0$. Dersom polynomet skal gjennom punktene $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ og $(3,5)$, har vi fire likninger

$$\begin{aligned} 1 &= p(0) = d \\ 2 &= p(1) = a+b+c+d \\ 3 &= p(2) = 8a+4b+2c+d \\ 5 &= p(3) = 27a+9b+3c+d \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

om du foretrekker det.

Siden den første likningen sier at $d = 1$, kan vi umiddelbart forenkle til

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 4 \end{array}$$

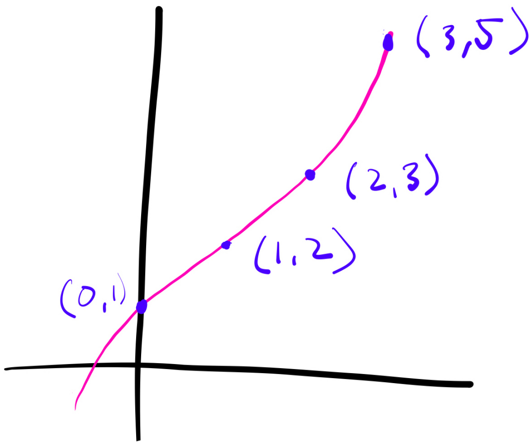
og gausseliminere

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 4 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 18 & 24 & 23 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{array}$$

slik at $c = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $a = \frac{1}{6}$. Polynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

Her er plot:



Det går også helt fint å bruke lagrangepolynomer, og skrive opp interpolanten på direkten:

$$\begin{aligned} p(x) =& 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \\ &+2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ &+3 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\ &+5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \end{aligned}$$

Det blir seff det samme, som du kan sjekke om du orker.

$\boxed{3}$ Siv har en kuleformet vanntank med radius R. På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.

Løsning: Dette er en klassiker i TMA4100, og du finner Selveste Seips løsningsforslag her: `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2014h.pdf`