TMA4101/4106/4111/4121

1 - 6 - LINEÆRALGEBRA

Da prøver vi Arnes bok.

$\boxed{\text{H}}$ Les kapittel 7, 8 og 12 og gjør alle oppgavene.

Sluttten av kapittel 8 hadde jeg egentlig tenkt å spare til senere, men det går fint å ta det nå. Vi får se hvor langt vi kommer på tre uker. Hvis du likte bedre det gamle opplegget, kan du fortsette på neste side.

Likningen $x = \cos x$ har kun én løsning, for $y = x$ og $y = \cos x$ skjærer hverandre kun ett eneste sted i hele $\mathbb{R}^2$. Men en likning kan fint ha mange løsninger. En likning kan faktisk ha uendelig mange løsninger. For eksempel er det uendelig mange punkter i $\mathbb{R}^3$ som passer i likningen

$$2x + 3y - z = 0,$$

og de ligger alle sammen på et plan med normalvektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Det er lett å se at dette planet går gjennom origo, siden origo er et punkt som passer i likningen.

For to uker siden lurte vi på om funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2$$

var injektiv, og hvis du husker definisjonen av injektiv funksjon[1] innså du kanskje at svaret er nei, siden likningen

$$c = 2x_1 + 3x_2$$

har uendelig mange løsninger. Funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

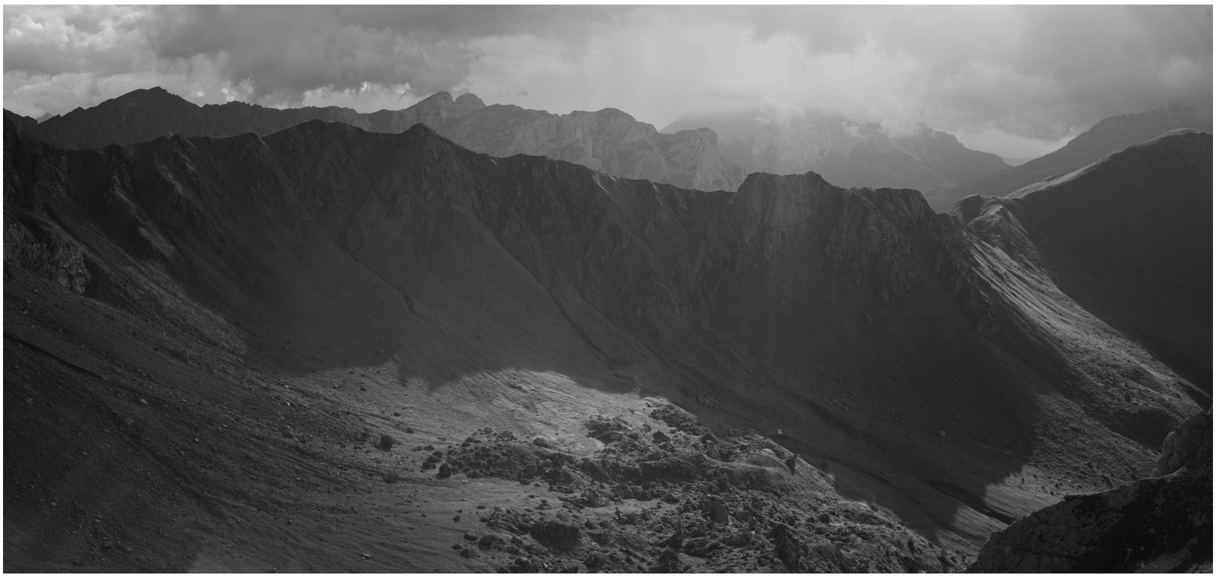
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$$

er derimot injektiv, og jeg lovte at dette på et eller annet tidspunkt skulle bli innlysende for deg. Nå skal vi se på det.

$\boxed{0}$ Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(Et bra stalltips er å gange den første likningen med 2 og så trekke likningene fra hverandre.)



[1] $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

Dersom du skjønte hvordan oppgave 0 skulle løses, ganget du den første likningen med 2 og fikk

$$4x_1 + 6x_2 = 2$$

og så trakk du likningene fra hverande og fikk

$$x_2 = 1$$

og så er det bare å sette inn denne i en av likningene, og så ser vi at

$$x_1 = -1.$$

Det er altså bare en kombinasjon av x_1 og x_2 som passer i likningssystemet, og jeg avsløre at uansett hva du hadde satt inn på høyresiden, så ville det samme skjedd. Dersom vi prøver å løse likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

så ser vi at dette kan gjøres på nøyaktig samme måte; vi ganger den første likningen med 2, trekker dem fra hverandre og får

$$x_2 = 2b_1 - b_2$$

som gir

$$x_1 = \left(b_1 - 3\left(2b_1 - b_2\right)\right)/2 = \left(3b_2 - 5b_1\right)/2$$

Det spiller altså ingen rolle hva b_1 og b_2 er, x_1 og x_2 blir entydig bestemt uansett, og vi kan konkludere med at f er injektiv. Nå var ikke dette regneeksemplet kjempeinteressant; hvorvidt en helt random funksjon som ikke betyr noe er injektiv eller ikke, kunne nok ikke brydd de fleste mindre. Men det å løse **lineære likningssystemer**, altså likningssystemer på formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

er helt ekstremt viktig. Lineære likningssystemer dukker opp i alle anvendelser uten unntak.

$\boxed{1}$ Et annengradspolynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Finn koeffisientene til et annengradspolynom som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$.

Dersom du skjønte hvordan oppgave 1 skulle løses, brukte du likningene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 1$ til å sette opp likningssystemet

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2a + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

Studiet av lineære likningssystemer kalles lineæralgebra. Realistiske modeller av fysiske problemer hoster gjerne opp likningssystemer med så mange likninger og ukjente at det ikke er trivielt å regne ut løsningen på rimelig tid, selv med en datamaskin. Det er for eksempel ikke noe problem å lage et likningssystem med 10000 likninger og ukjente som laptopen min trenger flere sekunder på å løse, og mange likningssystemer i faktiske anvendelser er mye mye større enn som så. Allikevel:

> If you can reduce a mathematical problem to a problem in linear algebra, you can most likely solve it, provided that you know enough linear algebra.
>
> - Peter D. Lax

Hvis du lærte det samme som jeg (født i 1983) på ungdomsskolen, lærte du å løse lineære likningssystemer ved innsettingsmetoden. Det finnes tusenvis av forskjellige teknikker for å løse veldig spesialiserte lineære likningssystemer, men metoden alle universitetskurs begynner med, kalles **gausseliminasjon**.[2]

$\boxed{2}$ Regn ut a, b og c i systemet over ved gausseliminasjon.

[2] Se SK eller `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination`

Gausseliminasjon ble oppfunnet av noen kinesere for omtrent to tusen år siden. Selv om du antagelig ikke skal gausseliminere så veldig mye etter du er ferdig å studere, må man nesten lære denne teknikken, for det er ikke så lett å forstå lineære likningssystemer uten å løse noen lineære likningssystemer. Nå tror jeg vi rett og slett bare skal trene litt.

$\boxed{3}$ Løs likningssystemene:

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=4\\ 3x+4y+5z&=5\\ 4x+5y+7z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{rrrrl} 3x_1 - & x_2 - & x_3 & & =1\\ -x_1 + & 3x_2 & & - \;\; x_4 & =0\\ -x_1 & & +3x_3 - & x_4 & =0\\ & - \;\; x_2 - & x_3 + & 3x_4 & =0 \end{array} \qquad \begin{aligned} 2z+\;\; iw+\;\; (5-3i)u&=10\\ 4z+2iw+(10+2i)u&=20+16i\\ 2iz-\;\; w+\;\; (4+6i)u&=2+12i \end{aligned}$$

En av de første tingene man gjør når man skal studere lineære likningssystemer, er å gå lei av å skrive pluss og minus, erlik og x_1 og x_2 og slikt. Derfor lager vi oss notasjon som er litt mer minimalistisk.

Systemet

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=4\\ 3x+4y+5z&=5\\ 4x+5y+6z&=3 \end{aligned}$$

skriver vi kort og godt

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 5\\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

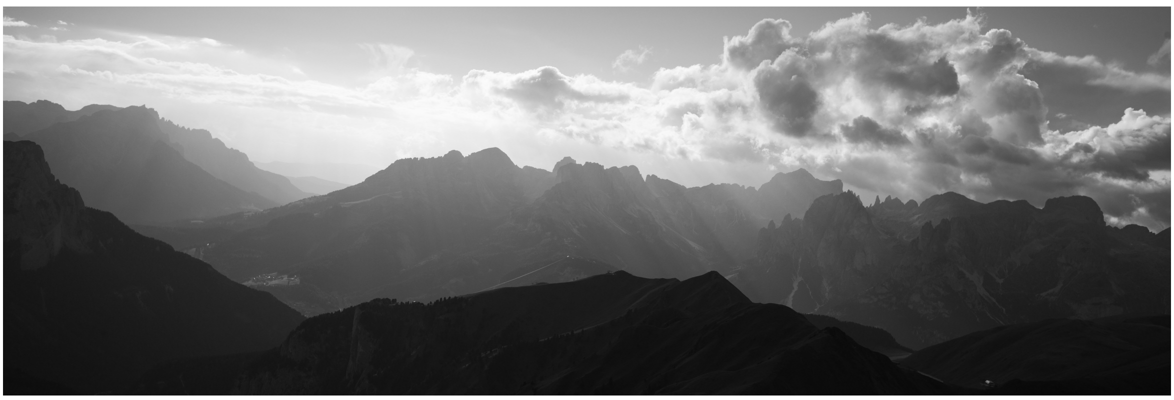
$\boxed{4}$ Løs likningssystemene på nytt og nyt hvor mye mindre skriving det blir:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 5\\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10\\ 4 & 2i & 10+2i & 20+16i\\ 2i & -1 & 4+6i & 2+12i \end{array}$$

Når jeg lærte å løse lineære likningssystemer på skolen i omtrent 1998, ble vi spart for alt det som er gøy. Hvis du nå har skjønt foran og bak på gausseliminasjon, kan vi begynne på det som er gøy.

$\boxed{5}$ Prøv å løse systemene

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 5\\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8\\ 3 & 4 & 5 & 10\\ 4 & 5 & 6 & 12 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 0\\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 0\\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$



For å skjønne hva som skjer i alle disse systemene, må man studere teorien som ligger i bånn for lineære likningssystemer. Les kapittel 7 i Arnes bok eller Skartsæterhagens kompendium (https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/notater/lin-alg.pdf) eller kapittel 2 her: https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf.

$\boxed{6}$ Alle punkter (x, y, z) som passer i likningen

$$ax + by + cz = d$$

ligger på ett og samme plan i rommet. Forklar hva som skjedde i oppgave 4 og 5.
(Hint: Sikkert lurt å repetere trippelproduktet mellom vektorer:
https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product.)

Noen løse geometriske ideer i tre dimensjoner hjelper oss imidlertid ikke dersom vi skal forstå at

$$\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{array}$$

har entydig løsning, mens

$$\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ -1 & i & i \end{array}$$

ikke har det. La oss se litt på likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Om vi bare tar et lite typografisk grep og skriver

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ser vi at et lineært likningssystem er en vektorlikning

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}$$

der

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Uttrykket

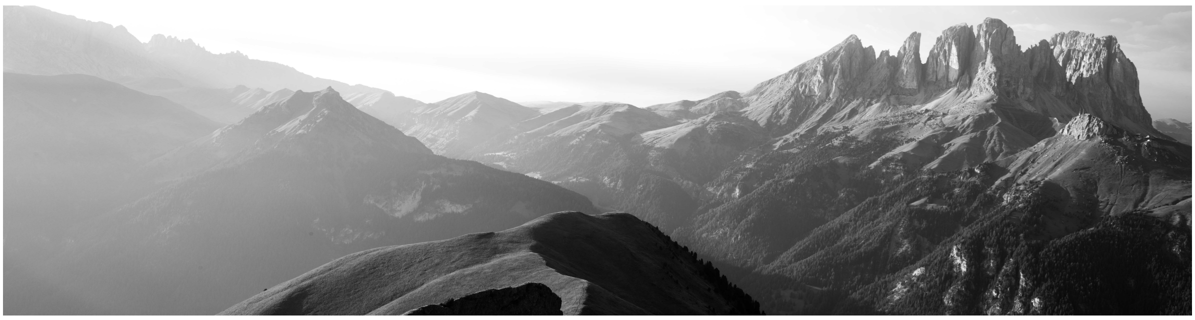
$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3$$

kalles en **lineærkombinasjon** av vektorene $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$, med **vekter** x_1, x_2 og x_3.

$\boxed{7}$ Prøv med utgangspunkt i dette å forklare når systemene i oppgave 5 har entydig løsning. [3] (Også her er trippelproduktet verdifullt å ha i bakhodet.)

Vektorene $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er **lineært uavhengige** dersom $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{0}$ impliserer at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **Har vi lineær uavhengighet, har vi også entydig løsning.** Fordelen med lineær uavhengighet (i motsetning til trippelproduktet) er at dette konseptet lett lar seg generalisere til $\mathbb{R}^{17}$ og løsningsrommet til differensiallikninger og mange andre ting som ikke er så lett å visualisere.

$\boxed{8}$ Hvilke av systemene i oppgave 5 har lineært uavhengige vektorer på venstresiden?



[3] Se kap. 8 i Arnes bok om du har glemt vektorregningen.

Likninger kan også være lineært avhengige eller uavhengige.

61 Amund har høns og kyr på gården sin. Vrang av vane vil han ikke si hvor mange dyr han har, men opplyser heller at hvert av dyrene har $\frac{141}{382}$ bein i gjennomsnitt og at differansen mellom antall hoder er 41 og at det finnes totalt 382 bein og 141 hoder.

Hvor mange høns og hvor mange kyr har Amund? Har Amund gitt overflødig informasjon?

62 Likningene i likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= 5 \\ 4x + 5y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

er lineært avhengige. I praksis betyr dette at en eller flere av likningene følger av en eller flere av de andre likningene. Hvilke likninger følger av de andre i dette systemet?

63 Er det noen likninger i likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= 5 \\ 4x + 5y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

som følger av de andre?

En annen grunn til at den tekniske definisjonen av lineær uavhengighet er som den er, er at den kan brukes på ting som ikke ligger i noe plan eller på en linje eller er særlig geometrisk i det hele tatt. Funksjoner kan også være lineært uavhengige eller ikke.

64 Er funksjonene

$$x_1(t) = e^{-t}\cos t \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = e^{-t}\sin t$$

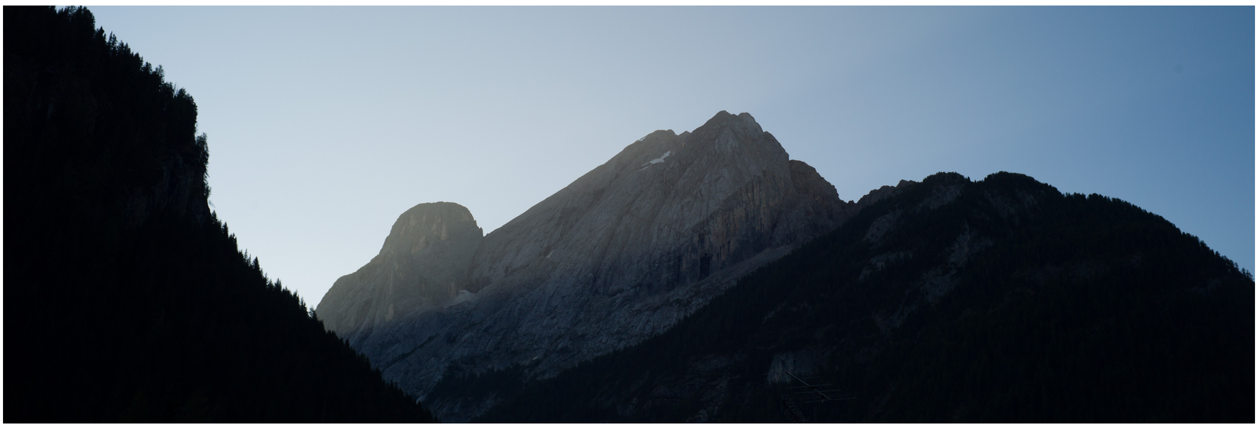
lineært uavhengige?

65 Hva med

$$x_1(t) = \cos^2 t \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = \sin^2 t \qquad \text{og} \qquad x_3(t) = 1 \quad ?$$

66 Hva med

$$x_1(t) = x^2 \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = x \qquad \text{og} \qquad x_3(t) = 1 \quad ?$$



Lineærkombinasjoner lukter jo ellers litt av skalarprodukt. Lineærkombinasjonen

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3$$

likner mistenkelig på et skalarprodukt mellom "vektoren" $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ og den ukjente $\mathbf{x}$. Denne nye vektoren kalles en **matrise**:

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Faktisk er det slik at også $\mathbf{x}$ er en matrise:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

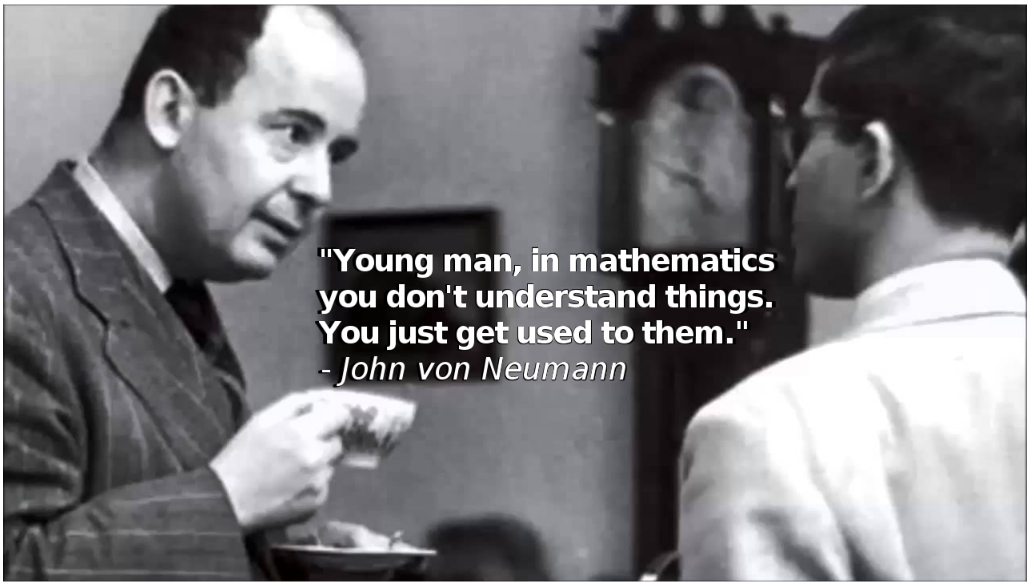
og vi tenker på

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

som et produkt mellom matrisen A og den ukjente $\mathbf{x}$. Dette nye produktet kalles et **matriseprodukt**, og her er definisjonen:

Dersom A og B er matriser med dimensjoner $m \times n$ og $n \times p$, er elementet c_{ij} i produktet $C = AB$ gitt ved skalarproduktet[4] *mellom rad nummer i i A og kolonne nummer j i B.*[5]

Rasjonalet for å definerer matrisemultiplikasjon slik, er at vi ønsker at operasjonen skal være **assosiativ**, altså at $A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$. Hvorfor dette er lurt vil bli klart på de neste sidene. Jeg har flere ganger i forelesning mislyktes katastrofalt med denne strategien for å motivere matrisemultiplikasjon, så det er antagelig lurt å slenge opp dette sitatet:[6]



[4] Husker du ikke skalarproduktet, er det antagelig lurt å freshe opp dette litt også:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product`

[5] En gang i foreelesning etter jeg hadde gitt denne definisjonen, var det en student som rettet en imaginær pistol mot tinningen og lot som om han skjøt seg selv i hodet. Så om du synes dette er litt hardt, er du ikke den første.

[6] John von Neumann oppfant både spillteori og den første aksiomatiske beskrivelsen av kvantefysikk og mye annet.

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

har **kolonner**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

og **rader**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon er litt tungt for alle som lærer det første gang. Ta det rolig. Det står forklart mange steder hvordan det funker. [7] Jeg har kunnet det så lenge at jeg husker null og niks av min egen prosess med å lære meg det, og aner følgelig ikke hvordan man skal gå frem for å lære det lenger. Det er bare en haug med skalarprodukter, så stang hodet i veggen til veggen gir etter. [8]

$\boxed{9}$ Gang sammen matrisene

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$\boxed{10}$ Siden et matrise-matriseprodukt består av en haug med skalarprodukter, bør det være klart at man ikke kan gange sammen matriser med vilkårlig dimensjon. La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Regn ut AB, BA, A^2, B^2 og $A + B$ eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening.

$\boxed{11}$ Her er en artig ting. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen I kalles **identitetsmatrisen**. Regn ut AI og IA.

$\boxed{12}$ Her er en enda artigere ting. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut både AB og BA. Hva tror du dette kan brukes til? (Det er nå du trenger at matrisemultiplikasjon er assosiativt.)

[7] Se for eksempel `https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)` eller `https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication`

[8] Lars Lundheim har noen bra triks her, men jeg husker dem ikke, for jeg trenger dem ikke. Spør ham. Svein Sunde har sikkert også noen triks, men jeg har aldri spurt; vi diskuterer mest orgel og kvantefysikk.

$\boxed{13}$ Hvis du ikke var helt sikker på hva B i forrige oppgave kan brukes til, prøv å gange vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

inn på høyre side av B og så ta en ny titt på oppgave 3.

Matrisen B i oppgave 12 kalles A sin **inverse matrise**, og vi skriver $B = A^{-1}$. Kvadratiske matriser (matriser med like mange rader som kolonner) har invers hvis og bare hvis kolonnene er lineært uavhengige. Den inverse matrisen kan beregnes på mange forskjellige måter, sjekk her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix`
Alle har sin favoritt. Skartsæterhagen liker best å gausseliminere seg frem til den inverse, men Skogestad liker å bruke adjugatet. Jeg liker ikke å beregne inverse matriser i det hele tatt.

$\boxed{12^{-1}}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Regn ut A^{-1} på en eller annen måte. (Les deg opp litt først. Fasiten har du i oppgave 12.)

$\boxed{13^{-1}}$ Løs oppgave 4 og 5 på nytt med invers.

Matrisemultiplikasjon tilfredsstiller ellers mange regneregler du er vant til, men ikke kommutativitet, unntatt i noen spesialtilfeller. Kommutativitet er at faktorenes orden er likegyldig, altså at

$$ab = ba.$$

$\boxed{14}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Regn ut AB og BA.

De enkleste modelleringsproblemene i anvendelser er som regel **lineære**. *En lineæroperator T er en funksjon som tilfredsstiller*

$$T(a\mathbf{x} + a\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og alle skalarer a og b.

Å gange en vektor inn i en matrise er en lineæroperator. Her er et par oppgaver som illustrerer poenget. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beregn:

$\boxed{15}$ $A\mathbf{x}$ $\boxed{16}$ $A\mathbf{y}$ $\boxed{17}$ $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ $\boxed{18}$ $A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ $\boxed{19}$ $A(2\mathbf{x}+3\mathbf{y})$ $\boxed{20}$ $2A\mathbf{x}{+}3A\mathbf{y}$

Linæeroperatorer er for **superposisjonsprinsippet** omtrent som kanel i en kanelbolle, som humle i øl eller som hele pepperkorn i fårikål. Konseptet kanelbolle blir temmelig meningsløst uten kanel, men man tenker kanskje ikke så mye over kanelsmaken når man har spist mange nok kanelboller.

$\boxed{21}$ Kanel smaker faktisk ingenting. Prøv å spise en kanelbolle eller en porsjon risengrynsgrøt mens du holder deg for nesen.

Fikk du til forrige oppgave, har du skjønt omtrent hvordan det er å prøve å forstå superposisjonsprinsippet uten å først forstå hva en lineæroperator er:

Lineæroperatorer er superposisjonsprinsippets er mest vesentlige ingrediens.

Kjært barn har mange navn, og lineæroperator har et par synonymer, **lineærtransform**, **lineærtransformasjon** og **lineæravbildning**. Jeg har vendt meg til å si lineæroperator fordi det er det de fleste ikkematematikere sier. Du har i bunn og grunn kjent til lineæroperatorer i mange år. Derivasjonsoperatoren er for eksempel lineær. La

$$D(x) = \dot{x} \quad \text{og} \quad y(t) = t^2 \quad \text{og} \quad z(t) = t$$

og beregn

$\boxed{15}$ $D(y)$ $\boxed{16}$ $D(z)$ $\boxed{17}$ $D(y+z)$ $\boxed{18}$ $D(y)+D(z)$ $\boxed{19}$ $D(2y+3z)$ $\boxed{20}$ $2D(y)+3D(z)$

$\boxed{21}$ Kanel smaker faktisk ingenting. Prøv å spise en kanelbolle eller en porsjon risengrynsgrøt mens du holder deg for nesen.

$\boxed{22}$ Fikk du deja vú nå? I så fall er du inne på noe.

Vi sier at en differensiallikning er lineær dersom operatoren der du "putter inn løsningen" i likningen er lineær. For eksempel er

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

en lineær likning siden

$$D(x) = \ddot{x} + b\dot{x} + cx$$

er en lineæroperator. [9]

$\boxed{23}$ Vis at dersom x og y er løsninger av

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

er også $ax + by$ en løsning (a og b er skalarer).

Det bestemte integralet er forresten også en lineæroperator. Finn arealet under grafen til

$\boxed{24}$ $\sin t$ mellom $t = 0$ og $t = \pi$

$\boxed{25}$ $\cos(t/2)$ mellom $t = 0$ og $t = \pi$

$\boxed{26}$ $2\sin t + 3\cos(t/2)$ mellom $t = 0$ og $t = \pi$

$\boxed{22}$ Fikk du deja vú nå? I så fall er du inne på noe.

[9] Følg med i neste bolk for eksempler på ikkelineære differensialoperatorer.

Apropos ordet "lineær". Dette ordet brukes litt forskjellig i forskjellige fagfelt. Matematikere reserverer dette ordet for noe som tilfredsstiller $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$, men det er endel andre mennesker som bruker det om situasjoner der det er en rett linje involvert. Dette er ikke det samme; et førsteordens polynom

$$p(x) = ax + b$$

er en lineær funksjon etter den matematiske definisjonen kun hvis $b = 0$.

I statistikk bruker de ordet "lineær" om førsteordens polynomer (vi ville sagt "affin" som betyr "lineær funksjon pluss en konstant") og **lineærregresjon** er kunsten å finne en rett linje som passer ganske bra til en haug med punkter som ikke ligger på en rett linje. Tenk at du for eksempel har målt drivstofforbruk (y_k) og sylindervolum (x_k) for en haug med biler og plottet dem i et koordinatsystem. Jeg har ikke et slikt datasett i skrivende stund, så la oss gjøre det enkelt og ta den teite punktmengden i margen istedet.

x	y
1	2
2	4
3	3
4	5
5	6

Hvis vi ønsker å finne en rett linje $p(x) = \beta_1 x + \beta_0$ som går gjennom alle punktene i datasettet, får vi vel evaluere p i x-koordinatene i tabellen og sette lik de korresponderende y-koordinatene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dette er et likningssystem med to ukjente og fem likninger, og siden vi prøver å sette en rett linje på fem punkter som åpenbart ikke ligger på en rett linje, kan jeg garantere at vi ikke finner en løsning. Men regresjonslinjen eller "trendlinjen" som økonomer ville sagt, kan man hoste opp ved å gange begge sider fra venstre med **den transponerte av matrisen**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og løse det korresponderende 2×2-systemet. (Hvorfor det funker skal vi komme tilbake til i vår.)

$\boxed{4245}$ Prøv dette og plot.
(Her er pythonkode: `folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/regresjon/regresjon.py`)

De siste ukene har vi gjentatte ganger støtt på uttrykk som

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right) + Be^{-\frac{b}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right)$$

og

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3$$

og

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Disse er eksempler på noe som kalles **lineærkombinasjoner**. Det betyr at du tar noen vektorer, ganger dem med hver sin skalar, og så legger sammen alt.

50 Men vent litt. Er

$$e^{-\frac{b}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right)$$

en vektor?

Det er det. En vektor er noe som lever i et

Vektorrom (folkelig definisjon):

Mengden av alle lineærkombinasjoner av en vektormengde.

Med andre ord, kan du ta lineærkombinasjoner av det er det en vektor.

51 Bare å bli vant til dette.

Det finnes selvfølgelig aksiomer for vektorrom. De fleste av dem går med til å definere hvordan en lineærkombinasjon funker, og dette kan du i bunn og grunn allerede fra gymnaset.

Vektorrom (ordentlig definisjon):

La $\mathbf{V}$ være en (ikke tom) mengde med vektorer som kan adderes og skalarmultipliseres. Vi sier at mengden $\mathbf{V}$ er et vektorrom over $\mathbb{C}$ dersom følgende er tilfredsstilt for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{C}$. (Du kan også har vektorrom over $\mathbb{R}$).
Det skal finnes en vektor, kalt $\mathbf{0}$, slik at

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

Addisjonen skal være assosiativ

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

og kommutativ

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

og vektorer

$$a\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}.$$

Vi krever dessuten

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

og

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

En anonym mtelsys-student ble en gang i evalueringsskjema spurt om det var noe vedkommende skulle ønske vedkommende hadde lært mer om, og da uttrykte vedkommende:

"Vektor-rom. Trodde det var kjempe teit men det er faktisk ikke så dumt"

$\boxed{52}$ Du kjenner allerede til mange vektorrom, vi har bare ikke kalt det vektorrom. Se om du kan skrive ned et par. (Bruk den folkelige definisjonen, ikke den lange.)

Litt av vitsen med vektorrom er å få en presis definisjon av konseptet dimensjon. Alle har en intuitiv forståelse av dette. En linje har en dimensjon, en tegning på et ark har to, vi lever i tre, og posisjonen til et stivt fysisk legeme kan spesifiseres fullstendig med seks dimensjoner (tre til massesenterets posisjon og tre til legemets orientering i rommet).

Men det er andre ting som også har dimensjoner. Løsningene til

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$

er et vektorrom med to dimensjoner:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$$

Det er to vektorer i lineærkombinasjonen, og to ubestemte koeffisienter. Komplekse tall er likeledes alle lineærkombinasjoner av to ting, real- og imaginærdel

$$z = a + bi$$

mens $\mathbb{R}^2$ er alle lineærkombinasjoner av to ting

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle lineærkombinasjoner på formen

$$y_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er bare $\mathbb{R}^2$ skrevet litt annerledes. Alle polynomer av maksimal grad en er også et todimensjonalt vektorrom:

$$p(x) = a \cdot x + b \cdot 1,$$

så man kan i bunn og grunn tenke at

Dimensjon?

Antall vektorer i lineærkombinasjonen?

53 Men det er en liten hake ved dette. Hvor mange dimensjoner har

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ?$$

Her støter vi nemlig på et lite problem; nemlig at den ene av disse tre vektorene på sett og vis er litt "overflødig". Vektorrommet av alle lineærkombinasjoner på formen

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

har bare to dimensjoner, siden de tre vektorene ligger i samme plan. Derfor trenger vi et nytt konsept som kommer på neste side. De tre påfølgende oppgavene er en grei huskeregel for dette konseptet.

$\boxed{54}$ Løs likningssystemet

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{55}$ Når du har gjort det, kan du løse likningssystemet

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{56}$ Hva med

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Hvis vi nå bare hadde trengt vektorer i $\mathbb{R}^3$, kunne vi holdt oss til å sjekke om vektorer ligger i samme plan eller på samme linje, men dette duger ikke i $\mathbb{R}^{17}$. Vi sier at vektorene i oppgave 5 er **lineært avhengige**, siden de kan lineærkombineres til nullvektoren:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Vektorene i oppgave 6 ligger ikke i samme plan, og den eneste måten å lineærkombinere dem til nullvektoren på, er å sette $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dette kalles

Lineær uavhengighet

Vi sier at vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

impliserer at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Dersom vektorene i lineærkombinasjonene som utgjør vektorrommet er lineært uavhengige, kalles dette en **basis** for vektorrommet. Et vektorrom har alltid mange basiser. For eksempel har $\mathbb{R}^2$ basisen

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

siden alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineærkombinasjon av disse to. Men

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

er en like god basis for $\mathbb{R}^2$, for alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineærkombinasjon av disse to også. Mengden

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

er ikke en basis for $\mathbb{R}^2$, for den er lineært avhengig - de aller fleste vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan ikke skrives som en lineærkombinasjon av disse to.

57 Vis at to parallelle vektorer er en lineært avhengig vektormengde.

Det går an å bevise at dersom du har to basiser for et og samme vektorrom, må disse ha like mange elementer. Derfor:

Dimensjon

Antall vektorer i basisen.

Vektorrommet $\mathbb{R}^5$ har fem dimensjoner fordi du trenger fem lineært uavhengige vektorer for å skrive et tilfeldig valgt punkt som en lineærkombinasjon:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

men det finnes som sagt mange andre basiser for $\mathbb{R}^5$. Du trenger bare fem lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^5$, og så har du en basis.

$\boxed{58}$ Finn en annen.

Lineær uavhengighet er et mer abstrakt konsept enn determinanter, men også mer anvendelig, siden matrisen ikke trenger å være kvadratisk.

$\boxed{59}$ Løs likningssystemet

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

og kommenter resultatet. Er kolonnene i matrisene lineært uavhengige?

$\boxed{60}$ Vis at dersom

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er c_1, c_2,...,c_n entydig bestemt.

Nå skal vi se litt på en spesiell type vektorer. Hvis du henger med på følgende, vil du kanskje forstå hvorfor det var naturlig å gjette på eksponensialfunksjonen som løsning til lineære differensialligningene vi har studert til nå. La

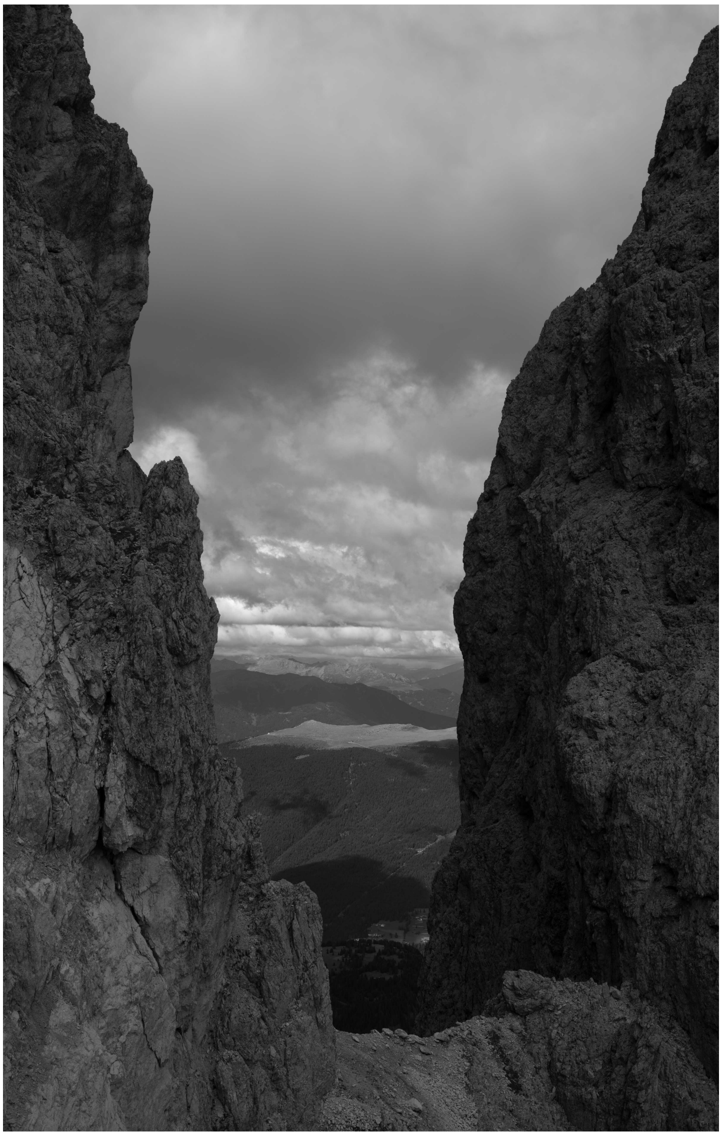
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

og beregn

$\boxed{27}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{28}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{29}$ $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{30}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{31}$ $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

og studer resultatene nøye.

$\boxed{32}$ Hva ser du?



Sjå her:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ikke stort å melde om. Men hva med denne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Noen vektorer har den egenskap at når man ganger dem inn i matrisen, kommer det ut en skalarmultippel av den samme vektoren. Dette ser tilforlatelig ut, men er utrolig viktig, og kalles **egenvektorer**. Den korresponderende skalarmultippelen kalles **egenverdi**, og det er vanlig å bruke den greske bokstaven λ på denne. Vi leter altså etter vektorer slik at

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

I eksemplet over er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og $\lambda = 9$.

$\boxed{33}$ Nå vet du hva du skulle lete etter i forrige oppgave. Prøv på nytt om du ikke så det isted.

$\boxed{34}$ Er

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

en egenvektor til A?

La oss nå lage en systematisk fremgangsmåte for å finne egenvektorer og egenverdier. Likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

kan vi skrive om til

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og har vi litt trening i enhetsmatrisen, ser vi at vi kan faktorisere dette som

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Nå vet du at dersom kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært uavhengige, har dette problemet entydig løsning, nemlig nullvektoren.

$\boxed{35}$ Hvorfor det?

Nullvektoren vil vi ikke skal klassifisere som egenvektor, for hvis den gjorde det, ville alle tall klassifisert som egenverdier, siden likningen

$$A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$$

er sann uansett hva λ er. Hvis likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

skal ha andre løsninger enn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, må vi kreve at kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært avhengige. Det er de hvis og bare hvis $\det(A - \lambda I) = 0$.

$\boxed{36}$ Prøv å finne egenverdiene til matrisen A på denne måten. Hvor mange egenverdier kan en 3×3-matrise maksimalt ha?

Slik skjer det: Vi beregner

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((6-\lambda)^2-4\right) \\
&\quad -2\left(2(6-\lambda)-4\right) \\
&\quad +2\left(4-2(6-\lambda)-4\right) \\
&= \lambda^3-13\lambda^2+36\lambda \\
&= \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)
\end{aligned}$$

slik at $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ og $\lambda_3 = 9$ er de tre egenverdiene. Polynomet $p(\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ kalles matrisens **karakteristiske polynom**. Husk nå at algebraens fundamentalteorem sier at et polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i),$$

der der $\lambda_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Det karakteristiske polynomet har alltid orden n. På folkemunne sier vi gjerne at en matrise alltid har "n" egenverdier, men dette fordrer at du teller på riktig måte. Du må telle antall lineære faktorer i det karakteristiske polynomet. [10]

$\boxed{37}$ Finn egenverdiene til

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hint: Å faktorisere et tredjeordens polynom er "trivielt" i den forstand at det finnes en formel: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation#General_cubic_formula`.
Men det er ikke trivielt å huske formelen. Prøv heller numpy:
`https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.eig.html`

> « Ingen mennesker er tjent med å gjøre slavearbeid. Det er ikke interessant, det er slitsomt og betalingen er lav […] Det arbeide som vi kan si ikke er menneskeverdig, det bør automatiseres vekk. »
>
> Jens Balchen i et intervju i *Aftenposten*, 8. januar 1966

[10] Det er ikke nødvendigvis enkelt å finne egenverdiene bare fordi de finnes. Niels Henrik Abel beviste i 1824 at det finnes ingen generell formel for å løse polynomlikninger med høyere orden enn 5:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Abel-Ruffini_theorem`

Når vi har funnet egenverdiene, kan vi finne egenvektorene ved å løse likningen

$$(A - \lambda_k I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

For eksempel er egenvektoren til $\lambda_2 = 4$ gitt ved alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siden

$$\left.\begin{matrix} 1-4 & 2 & 2 \\ 2 & 6-4 & 2 \\ 2 & 2 & 6-4 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

De andre finnes på samme måte.

$\boxed{38}$ Finn egenvektorene til matrisene A og B over. Hvis vil ha fasit, kan du bruke np.linalg.eig.

Alle skalarmultipler (unntatt nullvektoren) av en egenvektor er også egenvektorer. Derfor er det vanlig å definere noe som kalles egenrommet til en egenverdi - dette er alle egenverdiens egenvektorer samt nullvektoren.

Nå er vi frem kommet til rosinen i pølsen, eller kanskje kanelen i kanelbollen. Også andre lineæroperatorer enn matriser kan ha egenvektorer.

$\boxed{39}$ Hva er egenvektor eller egenfunksjon om du vil til derivasjonsoperatoren

$$D(x) = \dot{x} \quad ?$$

(Hint: du kjenner den godt.)

$\boxed{40}$ Skjønner du hvorfor det var lurt å gjette på denne funksjonen når du skulle finne løsninger til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad ?$$

I ingeniørmatematikken finnes det ikke noe naturlig skarpt skille mellom lineæralgebra og differensiallikninger. Fysiske modeller er stort sett umulige å forstå uten noen av dem. Nå skal vi smelte dem litt ordentligere sammen. La oss først herje litt med likningen

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Vi lager noen nye variable:

$$z_1(t) = x(t)$$
$$z_2(t) = \dot{x}(t)$$

Hvis du nå aksepterer at vi kan skrive

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}$$

går det an å skrive $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ på formen

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}.$$

41 Hva blir A?

42 Ser du noen løsninger?
(Hint: Det finnes to ekvivalente teknikker. Den ene er begynt på i forrige ukes pensum, og den andre kommer du kanskje på om du husker $\dot{x} = ax$ og går amok og tenker ordentlig kreativt.)

Likningssystemet

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$$

kalles gjerne et **lineært og autonomt differensiallikningssystem med konstante koeffisienter**, og matrisen A kan i prinsippet være hva som helst, ikke bare

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$$

slik som i oppgave 1. De to ovennevnte løsningsteknikkene funker på de aller fleste systemer (med noen unntakt, som vi skal komme tilbake til), og den første går som følger. La λ være en egenverdi til A, la $\mathbf{v}$ være den korresponderende egenvektoren, og la

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

$\boxed{43}$ Regn ut $\dot{\mathbf{x}}$ og $A\mathbf{x}$. Hva ser du?

Hvis du skjønte oppgaven over, vet du i prinsippet hvordan man ter seg, nesten uansett hva A måtte være.

$\boxed{44}$ Er $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ en løsning kun for 2×2-systemer? Hvor mange løsninger burde et $n \times n$-system ha dersom det er rettferdighet i verden?

Finn alle løsninger til

$\boxed{45}$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + 2z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_2 &= 2z_1 + 6z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_3 &= 2z_1 + 2z_2 + 6z_3 \end{aligned}$$

$\boxed{46}$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_1 \end{aligned}$$

$\boxed{47}$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_2 \end{aligned}$$

Så er det dette med initialverdier. I alle løsningene du fant over (hvis du gjorde det riktig), satt det noen ubestemte konstanter. Disse kan bestemmes ved å spesifiser et initialkrav

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

der $\mathbf{z}_0$ er en konstant vektor.

48 Regn videre på oppgave 5, 6 og 7 med initialkravene

$$\mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

henholdsvis.

Initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + z_2 \qquad & z_1(0) = 0 \\ \dot{z}_2 &= z_2 \qquad & z_2(0) = 1 \end{aligned}$$

illustrerer en viktig ting. Det karakteristiske polynomet til en $n \times n$-matrise kan alltid spaltes i n lineære faktorer, men det finnes ikke alltid n lineært uavhengige egenvektorer. I dette tilfellet sier vi at matrisen er **defekt**. Differensiallikningessystemet i oppgaven har flere løsninger enn de du fant, og derfor klarer du ikke tilfredsstille initialkravene.

I neste semester skal vi se på hva vi gjør i slike tilfeller, men akkurat nå lar vi det ligge, og ser heller på en annen måte å skrive opp (de samme) løsningene på.

49 Niglan litt på løsningen til $\dot{x} = ax$ og foreslå en løsning til $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

Du gjettet helt riktig:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{At}$$

Men hva i all verden skal vi gjøre med e^{At}? Hva betyr det i det hele tatt? Følg med videre.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ La $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ være et lineært likningssystem. Utgjør $\mathbf{x}$ et vektorrom?

$\boxed{2}$ Danner sannsynlighetstetthetsfunksjoner et vektorrom?
`https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function`

$\boxed{3}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Er kolonnene i AB lineært uavhengige?

Av og til er det slik at ting er lineæralgebra selv om det ser ut som noe helt annet.

$\boxed{4}$ La

$$\begin{aligned} p(x) &= 8x^3 - 8x^2 - 4x - 6 \\ q(x) &= -7x^3 - 7x^2 + 5x + 6 \\ r(x) &= 3x^2 - 8x - 4 \end{aligned}$$

Finnes det konstanter a, b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^3 - 7x^2 - 3x?$$

$\boxed{5}$ La

$$\begin{aligned} p(x) &= -6x^3 - 4x^2 - 8x + 8 \\ q(x) &= 6x^3 + 5x^2 - 7x - 7 \\ r(x) &= -4x^3 - 8x^2 + 3x \end{aligned}$$

Finnes det konstanter a, b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^2 - 7x - 3?$$

$\boxed{6}$ Kan en lineært uavhengig vektormengde inneholde nullvektoren?

$\boxed{7}$ Hvor mange dimensjoner har vektorrommet av alle lineærkombinasjoner på formen

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \quad ?$$

$\boxed{8}$ Hva med

$$c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3 \quad ?$$

LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{2}$ Vi ganger den første likningen med 4, trekker den andre likningen fra dette, og får

$$2b + 3c = 5.$$

Nå bytter vi likning nummer to ut med denne, og får likningssystemet

$$\begin{aligned} a + \; b + \; c &= 2 \\ 2a + 3c &= 5 \\ 9a + 3b + \; c &= 1 \end{aligned}$$

Vi gjentar prosessen, ganger første likning med 9 og trekker den tredje likningen fra dette, bytter ut tredje likning med det vi fikk, og får

$$\begin{aligned} a + \; b + \; c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ 6b + 8c &= 17 \end{aligned}$$

Nå kan vi gange den andre likningen med 3, trekke dette fra likning tre, og bytte ut denne, slik at vi får

$$\begin{aligned} a + \; b + \; c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Nå har vi fått **trappeform**, og det er bra, for vi kan regne ut

$$\begin{aligned} c &= -2 \\ b &= (5 + 3 \cdot 2)/2 = 11/2 \\ a &= 2 - 11/2 + 2 = -3/2 \end{aligned}$$

Polynomet som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$ er altså

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(-3x^2 + 11x - 4\right).$$

$\boxed{4}$ Du trenger ikke fasit på disse. Noen få linjer i python gir deg den:

```
A = np.array([[2, 3, 4], [3, 4, 5], [4, 5, 7]])
b = np.array([4, 5, 3])
x = np.linalg.solve(A, b)
```

Jeg skal allikevel ta den siste:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 4 & 2i & 10+2i & 20+16i \\ 2i & -1 & 4+6i & 2+12i \end{array}\right.$$

for det er mange som blir forvirret av gausseliminasjon når det er komplekse tall involvert. Begynn med å gange første likning med 2, trekke den fra likning nummer 2, og bytte ut:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 2i & -1 & 4+6i & 2+12i \end{array}\right.$$

Så ganger vi første likning med i, trekker den fra den siste, og får

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 0 & 0 & 1+i & 2+2i \end{array}$$

Hvis vi nå ganger likning nummer to med $(1+i)/8i$ og trekker dette fra den siste og bytter ut, får vi

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hm. Det er visst bare to likninger dette her. Den ene forsvant helt under gausseliminasjon! Siden likningene var konsistente får vi uendelig mange løsninger, og de kan skrives opp som følger. Først gir den andre likningen at $x_3 = 2$, og da sitter vi igjen med likningen

$$2x_1 + ix_2 + 2(5-3i) = 10.$$

Nå kan vi velge $x_2 = s$, regne ut at

$$x_1 = 6i - si.$$

Det er vanlig å skrive opp løsningene på vektorform slik:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6i - si \\ s \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette kalles å **parametrisere løsningsrommet**.

$\boxed{5}$ Vi gausser

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

Huff da, $x_2 + 2x_3$ kan da ikke være både 2 og 5. Disse likningene var inkonsistente, og vi har ingen løsning. Neste:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Disse likningene var konsistente, så nå kan du prøve å parametrisere løsningsrommet slik som i forrige oppgave. Den neste er lett

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

som gir at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Den siste er lik på en av de forrige:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

og vi får uendelig mange løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Likningssystemene i oppgaven over handler alle om å finne skjæringspunkter mellom tre plan. I likningssystemene med matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

finnes det ikke noe punkt der alle planene skjærer hverandre, siden de tre normalvektorene ligger i det samme planet. Dette kan du finne ut av ved å ta trippelproduktet mellom de tre normalvektorene. I likningssystemene med matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

peker normalvektorene i "hver sin retning", og det finnes et entydig skjæringspunkt mellom alle planene.

Dette kan være litt vanskelig å se for seg. Ta tre ark og eksperimenter litt med de forskjellige situasjonene. Hvis du synes det er håpløst, kan jeg trøste deg med at du får en bedre teknikk om noen få strakser.

$\boxed{7}$ Nå er det litt lettere å se for seg. Hvis de tre vektorene $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ peker i "hver sin retning", slik som

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

kan du nå frem til hvor som helst i $\mathbb{R}^3$ ved å lineærkombinere dem; det skjønner alle barn i barnehagen. Dersom de ligger i samme plan, slik som vektorene

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

kommer du deg ikke ut av dette planet uansett hva slags lineærkombinasjon du velger.

Hvis du skal finne ut om tre vektorer ligger i samme plan, kan du ta trippelproduktet mellom dem. Dette kalles for øvrig matrisens **determinant**, og gir deg volumet av parallellepipedet utspent av vektorene. Er dette volumet null, ligger de i samme plan, og er det noe annet enn null, peker de i "hver sin retning". Forhåpentligvis skjønner du nå at "hver sin retning" er bare tull og tøys, og sier oss ingenting. Vi trenger et mer presist konsept. Derfor lineær uavhengighet, se neste oppgave.

$\boxed{8}$ Vektorene

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er lineært avhengige, siden de kan lineærkombineres til nullvektoren, se oppgave 5. Vektorene

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige siden de kun kan lineærkombineres til nullvektoren ved at vektene alle er null, se oppgave 5.

$\boxed{61}$ La x være antall høns og y være antall kyr. Han har sagt at antall hoder er 141, som gir

$$x + y = 141$$

siden både høns og kyr har ett hode.[11] At de har 382 bein tilsammen gir likningen

$$2x + 4y = 382.$$

Amund har sagt at hvert av dyrene har $\frac{141}{382}$ bein i gjennomsnitt. Dette må åpenbart være feil siden det er høns og kyr det er snakk om, og det antagelig har flere enn 0.369 bein i gjennomsnitt. Antagelig mente han at hvert av dyrene har $\frac{382}{141}$ bein i gjennomsnitt. Dette er de to likningene over delt på hverandre, og siden han åpenbart ikke har ingen dyr, er dette en fullgod likning som følger av de to vi allerede har satt opp:

$$\frac{4x + 2y}{x + y} = \frac{382}{141}.$$

At differansen mellom antall hoder er 41, er ikke nødvendig å si, for dette følger av de to første likningene. Hvis vi tar tre av den første likningen og trekker fra den andre, får vi likningen

$$x - y = 41.$$

Amund har altså gitt oss fire likninger. En person som er trent i lineær uavhengighet vil raskt se at de to første likningene er uavhengige. Dette kan sees på flere måter. La oss først prøve å kombinere dem til likningen $0 = 0$.

$$\begin{aligned} & c_1(x + y = 141) \\ + \; & c_2(2x + 4y = 382) \\ = \; & \qquad (0 = 0) \end{aligned}$$

Hvis vi sammenlikner x-ene på hver side, får vi liknigen

$$c_1 + 2c_2 = 0$$

og gjør vi det samme med y-ene, får vi

$$c_1 + 4c_2 = 0.$$

Vi kan også gjøre det med høyresiden, og da får vi

$$141c_1 + 382c_2 = 0$$

Men det spiller ingen rolle. Det eneste valget av c_1 og c_2 som gjør alle disse likningene sanne, er $c_1 = c_2 = 0$. Med andre ord er likningene

$$\begin{aligned} x + y &= 41 \\ 2x + 4y &= 382 \end{aligned}$$

lineært uavhengige, og siden det er like mange likninger som ukjente, har vi entydig løsning. Amund har altså gitt oss to likninger mer enn nødvendig. Den ene av likningene var inkonsistent

[11] Det finnes visst tohodede skilpadder som har overlevd lenge i fangenskap:
https://en.wikipedia.org/wiki/Polycephaly

med de andre, men hvis vi antar at han byttet om på hoder og bein ved en feiltagelse i akkurat den likningen, går alt fint opp.

Jeg sjekka nå om disse likningene var lineært uavhengige bare for å illustrere. I praksis er det enklere å sette opp likningssystemet som en vektorlikning

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}141\\382\end{pmatrix}$$

og sjekke om vektorene

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige. Det er de, for

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

løses kun av $c_1 = c_2 = 0$, og vi kan konkludere at likningssystemet har entydig løsning.

$\boxed{62}$ Hvis du legger sammen den første og den tredje likningen og så trekker fra to av den i midten, får du likningen $0 = 0$. Med andre ord kan du skrive den første likningen som to av den andre minus den tredje, og den tredje som to av den andre minus den første, eller eventuelt den andre som en halv av den først pluss en halv av den tredje.

$\boxed{63}$ Nei. Du kan selv sjekke at likningene er lineært uavhengige. Dette er synonymt med at ingen av dem følger av de andre.

$\boxed{64}$ Ja. Hvis du prøver å få likningen

$$c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t = 0$$

til å være sann for alle t, er du pent nødt til å velge $c_1 = c_2 = 0$.

$\boxed{65}$ Nei, for

$$\cos^2 t + \sin^2 t - 1 \quad = 0.$$

$\boxed{66}$ Ja. Et andre ordens polynom

$$c_2x^2 + c_1x + c_0$$

er da ikke identisk lik null.

$\boxed{9}$ Å gange sammen matriser er en formel. Du går på Norges hippeste ingeniørutdanning. Du klarer det. Her er fasiten:

$$\begin{pmatrix}20 & 47 & 74\\26 & 62 & 98\\35 & 83 & 131\end{pmatrix}$$

$\boxed{10}$ Pythonrutinen for å gange sammen matriser kalles “matmul”. Denne kan kalles ved å bruke @, ser her:
`https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.matmul.html`
Dette gir deg fasit på denne oppgaven.

$\boxed{11}$
$$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&7\end{pmatrix}$$

$\boxed{12}$ Her er en enda artigere ting. La

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&2&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&2&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Dette kan brukes til å løse likningssystemer. Hvis du ganger med den inverse fra venstre på likningssystemet

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

får du løsningen

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}.$$

$\boxed{13}$ Hvis du ikke var helt sikker på hva B i forrige oppgave kan brukes til, prøv å gange vektoren

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&2&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\-3\end{pmatrix}$$

Dette er det du fikk som løsning på et av systemene i oppgave 3.

$\boxed{12^{-1}}$ Det enkleste er kanskje å gausseliminere

$$\begin{pmatrix}2&3&4&1&0&0\\3&4&5&0&1&0\\4&5&7&0&0&1\end{pmatrix}$$

og så gausseliminere helt til du får

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-3&1&1\\0&1&0&1&2&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{pmatrix}$$

Dette er kjedelig, men en fin test på om du kan gausseliminere feilfritt.

Hvis du ikke liker å gausse, kan du ta alle de ni 2×2-determinanter som er mulig å beregne ved å slette en kolonne og en rad i A, sette dem opp i et spesielt mønster, gange noen av dem med -1, og til slutt dele alt på $\det A$. Dette kalles kofaktorekspansjon:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix`

$\boxed{14}$
$$BA=\begin{pmatrix}42&54&73\\51&66&89\\60&78&105\end{pmatrix}\neq BA$$

$\boxed{15}$ $\begin{pmatrix}20\\26\\35\end{pmatrix}$ $\boxed{16}$ $\begin{pmatrix}47\\62\\83\end{pmatrix}$ $\boxed{17}$ $\begin{pmatrix}67\\88\\118\end{pmatrix}$ $\boxed{18}$ $\begin{pmatrix}67\\88\\118\end{pmatrix}$ $\boxed{19}$ $\begin{pmatrix}181\\138\\319\end{pmatrix}$ $\boxed{20}$ $\begin{pmatrix}181\\138\\319\end{pmatrix}$

$\boxed{15}$ $2t$ $\boxed{16}$ 1 $\boxed{17}$ $2t+1$ $\boxed{18}$ $2t+1$ $\boxed{19}$ $4t+3$ $\boxed{20}$ $4t+3$

$\boxed{23}$ Anta at både x og y er løsninger, altså at

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \qquad \text{og} \qquad \ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

Nå ser jeg at han fjotten som har laget oppgaven har brukt b til to forskjellige ting, både koeffisienten i likningen og vekten i lineærkombinasjonen $ax + by$. La oss endre sistnevnte til $z = d_1 x + d_2 y$ istedet. Vi setter z inn i likningen og får

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + b\dot{z} + cz &= \frac{d^2}{dt^2}(d_1 x + d_2 y) + b\frac{d}{dt}(d_1 x + d_2 y) + c(d_1 x + d_2 y) \\
&= (d_1\ddot{x} + d_2\ddot{y}) + b(d_1\dot{x} + d_2\dot{y}) + c(d_1 x + d_2 y) \\
&= d_1(\ddot{x} + b\dot{x} + cx) + d_2(\ddot{y} + b\dot{y} + cy) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{24}$ $\displaystyle\int_0^\pi \sin t \, dt = 2$

$\boxed{25}$ $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t/2)\ dt = 2$

$\boxed{26}$ $\displaystyle 2\int_0^\pi \sin t + 3\cos(t/2)\ dt = 2\int_0^\pi \sin t \, dt + 3\int_0^\pi \cos(t/2)\ dt = 2\cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$

$\boxed{54}$ Vi gausser, og får

$$\left.\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

som gir løsninger på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{55}$ Dette er i bunn og grunn det samme likningssystemet som isted, så vi kan skrive opp løsningene umiddelbart: som gir løsninger på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{55}$ Disse vektorene er lineært uavhengige, så $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ må være eneste løsning.

$\boxed{57}$ To vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er parallelle dersom $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$, der k er en skalar. Skriver vi den likningen slik:

$$\mathbf{x} + k\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

ser vi at vi har lineærkombinert $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ til nullvektoren med vektor som ikke null. Altså er de lineært avhengige.

$\boxed{58}$ Tja,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duger. Eller hvilken som helst annen lineært uavhengig vektormengde med fem vektorer i $\mathbb{R}^5$.

59 Vi gausser

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Her ble det to lineært uavhengige likninger, hvis løsninger er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Det finnes et viktig resultat som sier antall lineært uavhengige rader og kolonner er det samme i alle matriser. Dette tallet kalles matrisens **rang**.[12]. Rangen til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

er altså 2, og dette er antall dimensjoner i kolonnerommmet.

Vi gausser litt mer:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -8 & 10 & -16 & -6 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Det sto vel at vi skulle løse likningssystemene, men det er ikke så farlig nøyaktig hva løsningen på dette siste systemet er. Vi på det nåværende tidspunktet at det er entydig løsning, til tross for at vi har fire likninger og tre ukjente. Dette er fordi de tre kolonnene i matrisen er lineært uavhengige og vektoren på høyre side ligger i rommet utspent av disse. Se neste oppgave.

[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra)`

$\boxed{60}$ Anta at du kan skrive $\mathbf{w}$ som en linæerkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ på to forskjellige måter, altså at vi har både

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

og

$$\mathbf{w} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + ... + d_n\mathbf{v}_n.$$

La oss trekke disse likningene fra hverandre, slik at vi får

$$\mathbf{0} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = (c_1 - d_1)\,\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\,\mathbf{v}_2 + ... + (c_n - d_n)\,\mathbf{v}_n$$

Men siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige impliserer denne likningen at $c_1 - d_1 = 0$, at $c_2 - d_2 = 0$ og så videre. Med andre ord er $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, og så videre, og følgelig kan $\mathbf{w}$ skrives som en linæerkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ på kun én måte.

$\boxed{27}$ $\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\boxed{28}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\boxed{29}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\boxed{30}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$ $\boxed{31}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{32}$ De som er interessante her er 27, 29 og 31, der $A\mathbf{x}$ er en skalarmultippel av $\mathbf{x}$.

$\boxed{34}$ Ja. Dersom $\mathbf{x}$ er en egenvektor er også skalar multipler av $\mathbf{x}$ det. Bare se:

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{35}$ Du vet fra oppgave 60 over at dersom kolonnene er lineært uavhengige, har problemet kun én løsning. Nullvektoren er definitivt en løsning dersom høyresiden er null, og følgelig er det den eneste dersom kolonnene er lineært uavhengige.

$\boxed{36}$ Det karakteristiske polynomet til en $n \times n$-matrise har alltid orden n, og på grunn av algebraens fundamentalteorem har den følgelig alltid n egenverdier dersom du teller med multiplisiteten til hver av dem.

$\boxed{37}$ Dette er et kjedelig arbeid både for dere og meg, og et eksempel på hvordan eksamen kan ødelegge alt. Studenter bruker timevis av livene sine på å faktorisere tredjegradspolynomer, og matematikklærere bruker timevis av livene sine på å konstruere meningsløse matriser med karakteristiske polynomer som lar seg faktorisere med penn og papir av mennesker som ikke er spesialister i å faktorisere tredjegradspolynomer.

I dette tilfellet er det relativt enkelt å se at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor, og egenvektoren er helt klart 4. Dette gjør at du klarer å finne de to andre egenverdiene med polynomdivisjon om det er viktig for deg.

Når jeg kjører np.linalg.eig på matrisen B, får jeg

```
(array([1., 4., 1.]),
 array([[-0.81649658,  0.57735027, -0.23513651],
        [ 0.40824829,  0.57735027, -0.55958248],
        [ 0.40824829,  0.57735027,  0.79471899]]))
```

Egenverdien $\lambda = 1$ er lista to ganger, som selvfølgelig betyr at den har multiplisitet 2. Det som skjer når vi prøver å lete opp egenvektoren til denne, er følgende:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{array}\right| \sim \left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

som gir det todimensjonale rommet spent ut av alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette er det samme todimensjonale rommet som np.linalg.eig gir, men penn og papir produserer en mye penere basis.

$\boxed{39}$ Eksponensialfunksjonen så klart! Derivasjonsregelen

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

er nøyaktig samme type likning som

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

$\boxed{40}$ Siden derivasjonsoperatorer er lineære og

$$D(x) = \ddot{x} + b\dot{x} + cx$$

er en lineærkombinasjon av derivasjonsoperatorer, er D også en lineæroperator. Da kommer det kanskje ikke som noe sjokk at eksponensialfunksjonen er en egenvektor til denne operatoren:

$$D\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = \left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) e^{\lambda t}$$

Når vi løser den homogene likningen

$$D(x) = \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

leter vi altså etter de egenvektorene som har egenverdi 0, og dette er selvfølgelig løsningene til den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

$\boxed{41}$ Dette har vi gjort i forbindelse med pendellikningen. Selve difflikningen er

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \dot{z}_2 + bz_2 + cz_1 = 0$$

så skriver vi de to likningene vi har oppå hverandre:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -cz_1 - bz_2 \end{aligned}$$

ser vi at matrisen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.$$

$\boxed{42}$ La $\mathbf{x}$ være en egenvektor til A, med egenverdi λ, og la

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t}$$

Hvis du går helt tilbake i økten om funksjoner og repeterer hvordan du deriverer funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$, vil du antagelig henge med på følgende beregning:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = A\mathbf{x}e^{\lambda t} = A\mathbf{z}(t)$$

Vi kan altså finne løsninger til $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ ved å lete opp egenvektorer og egenverdier til A og sette dem sammen med eksponensialfunksjonen på denne måten.

$\boxed{45}$ Vi har allerede funnet alle egenvektorer og egenverdier til denne matrisen, så løsningen er bare å skrive opp:

$$\mathbf{z}(t) = c_1 e^{9t}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$\boxed{46}$ Det som er litt artig med denne oppgaven er at dette er systemet som fremgår ved å skrive om

$$\ddot{x} + x = 0$$

til system. Kan du se en sammenheng mellom røttene til det karakteristiske polynomet til denne likningen og egenverdiene til matrisen

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}?$$

$\boxed{46}$ Det som er litt artig med denne oppgaven er at det finnes to egenverdier, men bare én egenvektor. vi beregner

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\0 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

som gir $\lambda = 1$ som egenverdi med multiplisitet 2. Men når vi prøver å beregne egenvektorer, får vi

$$\begin{pmatrix}1-1 & 1\\0 & 1-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

som sier oss at alle egenvektorer er på formen

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

og det finnes ingen fler. Nå finnes det to linært uavhengige løsninger til difflikningssystemet, men den andre er litt herk å finne. Vent i spenning til neste semester.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vis at kolonnene i A er lineært uavhengige, finn A^{-1}, og løs likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Løsning: Vi ønsker som alle vet å løse systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og dersom $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen, er kolonnene lineært uavhengige. Vi gausser i vei

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 0 \end{array} \sim$$
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Et trent øye ser nå at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen, og følgelig er kolonnene lineært uavhengige. Så er det bare å brette opp ermene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

og se at

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi beregner til slutt

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}.$$

Finn P slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonal matrise. Løs initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Løsning: Vi finner egenverdiene og egenvektorene til A. Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{bmatrix} 13-\lambda & 20 \\ -10 & -17-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 7)$$

og de tilhørende egenvektorene blir

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

slik at

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løsningene til differensiallikningssystemet er

$$\mathbf{x} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-7t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ Finn den inverse matrisen til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

og bruk den til å løse systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

Løsning: Vi gausseliminerer (her kan det finnes flere veier til Rom)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Av dette ser vi at

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

kan også skrives

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

og ganger vi på hver side med den inverse matrisen, får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Beregn volumet til parallellepipedet utspent av kolonnene i matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

og bruk resultatet til å avgjøre om likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning, der

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Volumet er

$$\det A = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 1$$

Siden $\det A \neq 0$, er kolonnene i A lineært uavhengige, og derfor vil likningssytemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning uansett hva $\mathbf{b}$ er.

$\boxed{5}$ Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og diagonaliser A dersom det er mulig.

Løsning: Vi begynner med å finne det karakteristiske polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^3$$

og registrerer at det finnes en repetert egenverdi $\lambda = 1$ med multiplisitet 3. Vi finner egenverdiene ved å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som altså blir

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

De to første likningene i dette systemet impliserer at $v_2 = v_3 = 0$, mens v_1 kan være hva som helst, siden den ikke inngår i likningssystemet en gang. Egenvektorene til $\lambda = 1$ blir følgelig

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siden matrisen kun har en lineært uavhengig egenvektor, er den ikke diagonaliserbar, og vi kan ikke finne en diagonalmatrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

$\boxed{6}$ Finn en løsning til

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

Løsning: Dette er et likningssystem på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

der matrisen A er identisk med den i forrige oppgave. Vi vet at derfor at

$$\mathbf{x}(t) = ce^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der c er en vilkårlig konstant, er en løsning. Det finnes to lineært uavhengige løsninger til, men de er litt mer kompliserte å regne ut, så det er ikke pensum i høst. Initialverdikravet

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

er tilfredsstilt dersom $c = 1$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$