1 - 6 - LIKNINGSSYSTEMER I - LF

$\boxed{1}$ Vi gausser:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Som du ser har vi nå nådd **trappeform**. Dette er gunstig, for når man har trappeform, kan man parametrisere løsningsrommet. Velg $x_4 = s$. Da får vi (jobb deg fra nederst til øverst)

$$\begin{aligned} x_3 =& -s \\ x_2 =& 2 + x_3 = 2 + s \\ x_1 =& (4 - x_2 - x_3 - 2x_4)/2 = (4 - 2 - s + s - 2s)/2 = 1 - s \end{aligned}$$

slik at løsningsrommet er alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ 2+s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siden løsningen ikke var entydig, vet vi at kolonnene er lineært avhengige. Hadde vi ikke visst det, måtte vi gausset slik:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og så valgt $x_4 = s$ som over, og regnet ut at

$$\begin{aligned} x_3 =& -s \\ x_2 =& x_3 = 2 + s \\ x_1 =& (-x_2 - x_3 - 2x_4)/2 = (-2 - s + s - 2s)/2 = -s \end{aligned}$$

slik at løsningsrommet er alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

og konkludere med at det finnes massevis av løsninger som ikke er nullvektoren, slik at kolonnene er lineært avhengige. Merk sammenhengen mellom løsningen til de to systemene - det ser ut til å følge systemet med homogen og inhomogen løsning som vi støtte på når vi løste differensiallikninger.

For å finne ut om det er lineært uavhengige rader, kan vi gausse dette systemet:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Her her jeg gjort om rader til kolonner og kolonner til rader - dette kalles å **transponere** matrisen. Denne operasjonen trenger vi ikke før i TMA4106, men nå vet du hva det går i. Gausser vi systemet

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ser vi at får massevis av løsninger og følgelig lineært avhengige rader. Merk at strukturen på trappeformen er den samme, med tre diagonalelementer forskjellig fra null. Ikke tilfeldig.

$\boxed{2}$ Determinanten i systemet gir hypervolumet av hyperparallellepipedet iutspent av kolonnene i matrisen: `https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant`
Den beregnes ved en å jobbe seg rundt i matrisen på en spesiell måte. Først tar man alle tallene i øverste rad, alternerer dem med pluss og minus, og ganger dem med determinantene til noen mindre matriser der man har tatt vekk raden og kolonnene til hvert tall i øverste rad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

De fire 3×3-determinantene til høyre i likningen beregner du på samme måte som du lærte på skolen, og svaret blir i dette tilfellet 0, siden kolonner og rader er lineært avhengige. Dette er fordi radene og kolonnene ikke spenner ut et ordentlig hyperparallellepiped i $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{3}$ Likningssystemet blir

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setter vi $x_1 = i_1$ og $x_2 = i_2$ og $i_3 = x_1 - x_2$, får vi likningssystemet

$$\begin{aligned} R_3(x_1 - x_2) + R_1 x_1 =& V \\ R_3(x_2 - x_1) + R_2 x_2 =& 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$$

som er et like bra system, det er bare det at en av likningene i det forrige systemet er eliminert.

$\boxed{4\text{-}7}$ Disse oppgavene er designet for at jeg skal kunne vise deg et par triks. La oss først sette opp systemet i oppgave 4. Fire sløyfer, fire likninger. De blir

$$\begin{aligned} Rx_1 + R(x_1 - x_2) + R(x_1 - x_3) &= V_1 \\ Rx_2 + R(x_2 - x_1) + R(x_2 - x_4) &= 0 \\ Rx_3 + R(x_3 - x_1) + R(x_3 - x_4) &= 0 \\ Rx_4 + R(x_4 - x_2) + R(x_4 - x_3) &= 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & -R & 0 \\ -R & 3R & 0 & -R \\ -R & 0 & 3R & -R \\ 0 & -R & -R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

om du vil. Setter du $R = 1$ får du et system fra oppgave 3 i forrige uke, så løsningen har du allerede, så lenge du forstår at det er helt innafor å skrive systemet slik:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

slik at det faktisk bare er å ta løsningen fra forrige økt og gange med V_1/R. Siden jeg ikke gaussa det systemet da, får jeg gjøre det nå:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 63 & -27 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & 21 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 16 \end{array}$$

som gir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsningen til

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & -R & 0 \\ -R & 3R & 0 & -R \\ -R & 0 & 3R & -R \\ 0 & -R & -R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{15R} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis du nå ser på hva som er gjort over, vil du se at det å løse

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vil tvinge deg til å gjøre nøyaktig de samme gausselimineringsstegene, og likeledes med oppgave 6 og 7. Gjør du dette, får du henholdsvis

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dette kunne vi like gjerne gjort i en smell slik:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

og nå skjønner du forhåpentligvis gaussing av dette systemet produserer den inverse matrisen - systemet er bare

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og vi har faktisk at

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

er følgelig den inverse matrisen, så nå er det bare å multiplisere V_k/R og vips så har du strømmene.

$\boxed{8}$ Her er det bare å legge sammen løsningene på fra oppgave 4-7, dette heter superposisjonsprinsippet og det kommer vi tilbake til om to uker.

$\boxed{9}$ Slik setter du en matrise i python:

```
A=np.array([[2,3,4],[3,4,5],[4,5,7]])
```

og husk doble firkantklammer for å få søyle- og ikke radvektor:

```
b=np.array([[4],[5],[3]])
```

og så løser du slik:

```
np.linalg.solve(A,b)
```

To andre nyttige kommandoer er

```
np.linalg.det(A)
```

og

```
np.linalg.inv(A)
```

10 Identitetsmatrisen lar vektorer være helt i fred:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

11 Denne speiler om x_2-aksen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

12 Mens denne speiler om x_1-aksen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

13 Denne speiler om origo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

14 Og denne om linjen $x_1 = x_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

15 Denne projiserer ned på x_1-aksen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16 Mens denne projiserer ned på x_2-aksen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

17 Og denne strekker vektorer

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

18 Denne roterer vektorer vinkelen θ mot klokken når $\theta > 0$, og med klokken når $\theta < 0$. Dette ser vi siden

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

helt klart er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rotert vinkelen θ og siden

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

helt klart er

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rotert vinkelen θ og siden

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{19}$ Denne gjør ingenting, akkurat som i oppgave 10.

$\boxed{20}$ Denne speiler om linjen $x_2 = x_3$, slik som i oppgave 14.

$\boxed{21}$ Denne projiserer ned på x_1-aksen, slik som i oppgave 15.

$\boxed{22}$ Denne projiserer ned i x_1x_2-planet.

$\boxed{23\text{-}35}$ Disse roterer vektorer rundt henholdsvis x_3-aksen, x_2-aksen og x_1-aksen.

$\boxed{33}$ Når vi har funnet egenverdiene, kan vi finne egenvektorene ved å løse likningen

$$(A - \lambda_k I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

For eksempel er egenvektoren til $\lambda_2 = 4$ gitt ved alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siden

$$\left.\begin{array}{ccc} 1-4 & 2 & 2 \\ 2 & 6-4 & 2 \\ 2 & 2 & 6-4 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} -3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

De andre finnes på samme måte.

$\boxed{34}$ I oppgave 10-13 er matrisene diagonale, og da blir det veldig greit, for egenverdiene står på diagonalen, og standardbasisen er egenvektorer. Matrisen i oppgave 14 må vi nesten ta manuelt. Det karakteristiske polynomet er

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

slik at egenverdiene er 1 og -1. Gausser vi systemet

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

får vi at egenvektorer til $\lambda = 1$ er alle vektorer på formen

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Likeledes er egenvektorer til $\lambda = 1$ er alle vektorer på formen

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De tre neste er diagonale og løses slik som 10-13. Rotasjonmatrisen er litt artig. Det karakteristiske polynomet er

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2.$$

Setter vi dette lik null og finner λ, får vi

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}.$$

Nullrommet til

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \pm i\sin\theta \end{pmatrix}$$

er henholdsvis alle skalarmultipler på formen

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

Hvis du skjønner ideen bak egenvektorer (matrisen skalerer dem) og ikke kjente til komplekse tall, ville du kanskje ha hoppet til den konklusjon at rotasjonsmatrisen ikke har egenvektorer siden den roterer alle vektorer, men dette er fei. Det er bare det at egenverdier og egenvektorer er komplekse. I oppgave 19-25 kan du gjenbruke alt jeg nettopp regna ut, siden alle matrisene (unntatt den i 24) er **blokkdiagonale**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix`
For eksempel er egenverdine til den i 25 1 og $e^{i\theta}$, og egenvektorene er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

og alle skalarmultipler (men ikke lineærkombinasjoner) av disse. Matrisen i 24 har de samme egenverdiene, og alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

som egenvektorer.