1 - 5 - DIFFERENSIALLIKNINGSSYSTEMER

Differensiallikninger har i noen tilfeller enorm prediktiv kraft. Hvis du skal sende en rakett til månen, må du løse en haug med differensiallikninger bygget på Newtons gravitasjonslov. Men realistisk modellering er fryktelig komplisert - noen av de enkle modellene vi studerer her passer greit til måledata (for eksempel RC-kretsen), mens noen er håpløst inadekvate (for eksempel atmosfæretrykkmodellen). Vi må allikevel gjennom dem, for det er umulig å forstå kompliserte modeller uten å først forstå enklere modeller.

I denne økten skal vi se på modeller som er mer kompliserte, der penn og papir ikke lenger er det nyttigste redskapet. Numeriske metoder overtar. La oss varme opp med en modell som er mulig å finne ut av med penn og papir, men der differensiallikningen er mye vanskeligere å løse enn de vi så på i forrige uke. Du husker forhåpentligvis E. Coli-modellen fra forrige uke:

$$\dot{x} = ax \qquad x(0) = x_0 \qquad a > 0$$

som har entydig løsning $x(t) = x_0 e^{at}$. Denne modellen spår eksponensiell vekst for all fremtid. Men som David Attenborough i 2013 uttalte under et foredrag i The Royal Geographical Society:

"Anyone who thinks that you can have infinite growth in a finite environment is either a madman or an economist." [1]

Dyr som formerer seg kan sjelden fortsette med det uten å før eller siden oppleve noen som helst form for begrensning i veksten. De må jo ha mat. Maurkolonier og sjimpanseflokker dreper hverandre. [2] Den enkleste utvidelsen for å inkorporere dette i modellen vi startet med, er å erstatte a med en positiv funksjon som har et nullpunkt i den bestanden x som maksimalt kan opprettholdes på området. Hvis vi gjør det enkelt og sier at denne funksjonen skal være en rett linje, får vi det **logistiske problemet**[3]

$$\dot{x} = a\,(1 - x/k)\,x \qquad x(0) = x_0 \qquad a > 0,\ k > 0$$

der k er en konstant som kalles **bærekapasiteten**. Hvis du ser nøye på likningen, vil du nok se at når x stiger mot k, vil vekstraten synke mot null, slik at dyrene formerer seg saktere og saktere. Denne likningen kan løses, men det er ikke trivielt, se ukens nøtter:

$$x(t) = \frac{k x_0 e^{at}}{k - x_0 + x_0 e^{at}}.$$

$\boxed{1}$ Sjekk at det er riktig, og plott i python for forskjellige a, k og x_0. Hva er likevektsløsningene?

[1] Sitatets opprinnelse er noe usikker. Det var nok ikke han som fant det på.
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gombe_Chimpanzee_War
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function

Snøskoharen (Lepus americanus) er en liten nordamerikansk hareart som er kjent for sine voldsomme bestandssvingninger. Bestandssvingningene forekommer med en periode på omtrent ti år, og skyldes en kombinasjon av faktorer, slik som at den formerer seg fort og at den kanadiske gaupen (Lynx canadensis) nesten ikke spiser noe annet enn snøskohare dersom den har tilgang på dem.[4]

Dette var et av de første biologiske systemene som ble forsøkt modellert av matematikere.[5] Utledningen av likningene går omtrent som følger. La x være harebestanden og y gaupebestanden. Ved fravær av gaupe vil harene formere seg eksponensielt, slik at

$$\dot{x} = ax$$

der $a > 0$. Dersom det finnes gaupe, spiser disse harer og dette fører til en nedgang i harebestanden. Hvis vi antar at predasjonen er proporsjonal med *både* harebestanden x og gaupebestanden y, og at predasjon er den eneste av harenes dødsårsaker som ikke er tatt høyde for i a, får vi mekanismen

$$\dot{x} = ax - bxy$$

der $b > 0$. Det første leddet på høyresiden beskriver hvordan harene formerer seg, og det andre leddet beskriver predasjonen. Økning i antall harer er differansen mellom disse to.

Gaupen oppfører seg på alle måter stikk motsatt i denne modellen. Hvis du antar at gaupene kun spiser hare, kan du ved fravær av hare trygt anta at gaupene dør ut med en rate som er proporsjonal med bestanden:

$$\dot{y} = -cy$$

og dersom det er hare, fører dette til økning i gaupebestanden som er proporsjonal med både harebestanden og gaupebestanden:

$$\dot{y} = -cy + dxy$$

Alt i alt får vi differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

der a, b, c og $d > 0$. Lotkavolterrasystemet kan ikke *løses* i ordets rette forstand, det vil si at vi klarer ikke finne et par med funksjoner $x(t), y(t)$ som passer i likningssystemet. Det at systemet ikke kan løses, betyr ikke at alt håp er ute; det finnes massevis av andre teknikker for å hale informasjon ut av systemet.

[4] https://www.enr.gov.nt.ca/en/services/lynx/lynx-snowshoe-hare-cycle

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equations

Det første vi kan gjøre er å dele likningene på hverandre, sortere litt og integrere med hensyn på t. Hvis du gjør dette riktig, får du at en eventuell løsning må ligge på den kjente og kjære kurven

$$dx + by - c\ln|x| - a\ln|y| = C$$

der C er vilkårlig konstant.

$\boxed{2}$ Prøv.

Størrelsen $f(x, y) = dx + by - c\ln|x| - a\ln|y|$ kalles i dette tilfellet et **førsteintegral**, og må altså være konstant på en løsningstrajektorie $x(t), y(t)$. Et uttrykk på formen $f(x, y) = C$ er ikke fullt så nyttig som et par med funksjoner $x(t), y(t)$, men ikke så langt unna. Du klarer å hente ut den samme informasjonen, men det er litt mer jobb.

$\boxed{3}$ Gå nå tilbake til økt 2 og se på alle figurene på side 5. og prøv å få en kvalitativ ide om hvordan løsningstrajektoriene ser ut. Lotkavolterrasystemet har to likevektsløsninger. Finn dem.

Førsteintegralet i lotkavolterrasystemet er ikke så enkelt å tolke. Nå skal vi se på en annen modell der førsteintegralet er kjent og kjært. En pendel som henger fra taket og dingler uten friksjon eller luftmotstand, tilfredsstiller

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

der θ er vinkelutslaget med loddlinjen, l er pendelens lengde og g er tyngdeakselerasjonen.

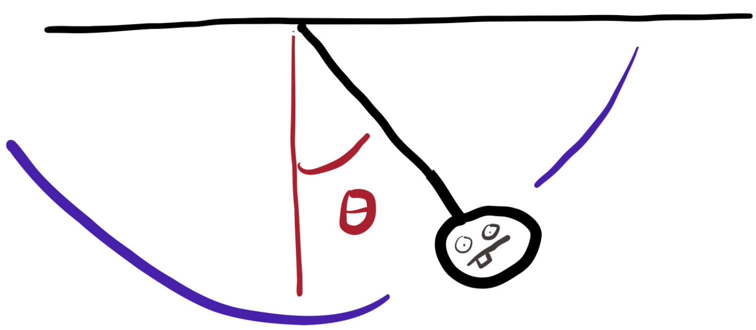
$\boxed{4}$ Tegn opp og utled likningen fra Newtons andre lov.

Førsteintegralet kan i dette tilfellet utledes ved å gange likningen med $ml^2\dot{\theta}$ og integrere:

$$m\frac{1}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = C,$$

$\boxed{5}$ Gjør dette og tolk førsteintegralet fysisk.
(Hint: Du har lært dette i fysikktimene på gymnaset.)

Hvis du, som jeg, syntes det var litt mystisk å få slengt Newtons lover i trynet og så bare få vite at energien var konservert uten noe mer forklaring, har du nå grunnen. Energikonservering følger av Newtons lover, og oppgave 5 er et eksempel på hvordan.



Akkurat som for lotkavolterrasystemet, er det håpløst å hente ut $\theta(t)$ fra pendellikningen. Men nå skal vi se på enda en teknikk. Det heter linearisering, og fysikere elsker det.

$\boxed{6}$ Vis geometrisk at

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

(Hvis det er for vanskelig, finner du utledningen i kap. 2.5 i Adams.)

Av dette kan vi slutte at dersom pendelens vinkelutslag er lite, er $\theta \approx \sin \theta$, slik at vi får **den lineariserte pendellikningen**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

$\boxed{7}$ Denne har du løst før. Sett i gang.

Både den logistiske modellen og lotkavolterramodellen er tilnærmet ubrukelige til prediksjon. Det vi prøver å ta med oss fra dem er noen grunnleggende ideer som i kan ha en viss verdi. For eksempel vil E. Coli formere seg omtrent eksponensielt så lenge det er god plass i petriskålen. Veksten avtar etterhvert som skålen blir full, og den logistiske kurven ser kvalitativt riktig ut. Det er det samme med Lotka-Volterra.

Det er bare det at "det at det ser kvalitativt riktig ut" ikke er godt nok for prediksjon. For prediksjon må man som regel ha en ide om mekanismen som er presis og ikke vag. Men den lineariserte pendellikningen gir oss faktisk en modell som er grei nok, ihvertfall så lenge vinkelutslaget er lite. I realfagsbygget finner du Norges lengste foucaultpendel.[6]

$\boxed{8}$ Finn ut hvor lang den er.
(Hint: Mål perioden så nøyaktig du kan, og sammenlikne med den lineariserte pendellikningens analytiske løsning. Institutt for fysikk har visst målt tyngdeakselerasjonen i kjelleren på realfagsbygget temmelig nøyaktig til 9.8214675 meter per sekund per sekund.)

[6] https://www.ntnu.no/fysikk/foucault

Et plot av y mot x der x og y er løsningene til et differensiallikningssystem, kalles et **faseplott**. Men det kan også være interessant å plotte funksjonene $x(t)$ og $y(t)$ mot t i samme figur. Nå skal vi se på *industristandarden* for å takle slikt, nemlig **numeriske differensiallikningsløsere**. La oss bruke Lotka-Volterra med $a = b = c = d = 1$ som eksempel:

$$\dot{x} = x(1 - y)$$
$$\dot{y} = y(x - 1)$$

Jeg har prøvd å forklare ideen bak numeriske differensiallikningsløsere hundrevis av ganger siden jeg var student, og det går dårligere og dårligere for hver gang jeg prøver. Men ideen er i bunn og grunn enkel: Hvis du antar at populasjonene står i punktet (x, y), kan du *anslå størrelsen på dem litt senere* ved å bruke differensiallikningene og din forståelse av tangenten (se oppgave 27 i økten om funksjoner). Høyresiden av likningen forteller deg jo hvilken retning $(\dot{x}, \dot{y})$ løsningen er på vei. Her er en kode som regner ut numerisk løsning ved Eulers eksplisitte metode.[7]

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=20
N=2000
h=T/N

t=np.linspace(0,T,N+1)
x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)

x[0]=2
y[0]=2

for n in range(N):
    x[n+1]=x[n]+h*x[n]*(1-y[n])
    y[n+1]=y[n]+h*y[n]*(x[n]-1)

plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.savefig('lotkavolterra-tid.png')

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.savefig('lotkavolterra-fase.png')
```

$\boxed{9}$ Finn ut hva koden gjør og hva Eulers eksplisitte metode er.
(Antagelig er dette første gang du får en kode slengt i trynet med beskjed av en autoritetsperson om å finne ut hvordan den virker. Jeg vedder en månedslønn på at det ikke er siste.)

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

Eulers eksplisitte metode fungerer omtrent som følger. Man deler intervallet $[0, T]$ på t-aksen inn i små biter med lengde $h = T/N$. Delingspunktene kalles **tidssteg**, og er gitt ved

$$t_n = nh \qquad\qquad 0 \leq n \leq N.$$

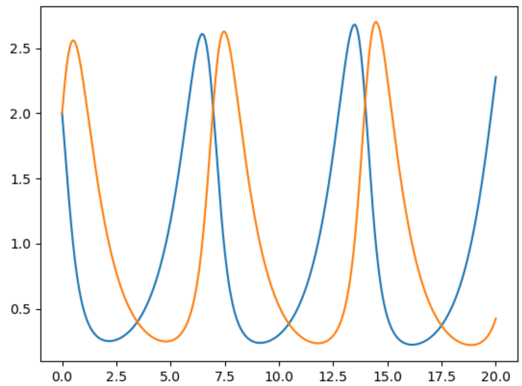
Mengden med disse $N+1$ punktene kalles **gitteret**, og for hver t_n definerer vi en tilnærming:

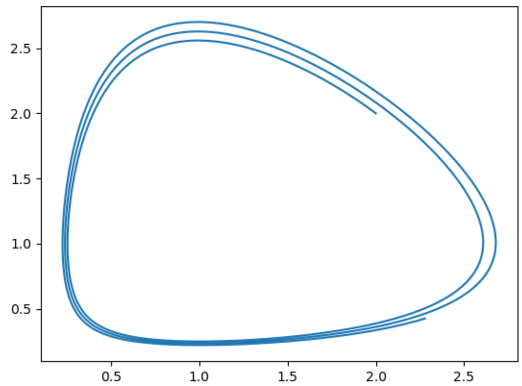
$$x_n \approx x(t_n) \qquad\qquad y_n \approx y(t_n)$$

Disse beregnes rekursivt ved å ta tilnærmingen på forrige tidssteg, beregne tangenten direkte fra differensiallikningen der, og legge til h ganger denne tangenten:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n(1 - y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hy_n(x_n - 1)$$

Koden på siden over produserer disse to figurene (den til høyre kalles et **faseplott**):





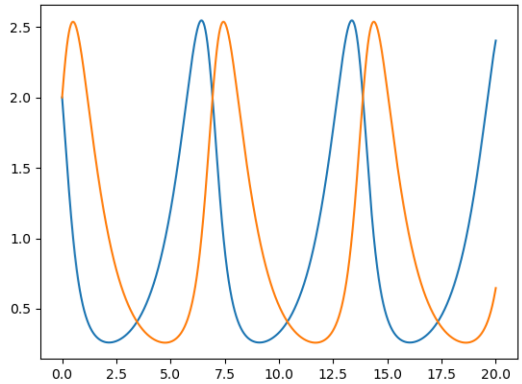
Den til venstre er x og y mot t mens den til høyre er x mot y. Disse to figurene illustrerer to veldig viktige poenger. For det første er denne løsningen ikke kvalitativt korrekt, og for det andre er dette lett å se fra den ene figuren, men ikke fra den andre.

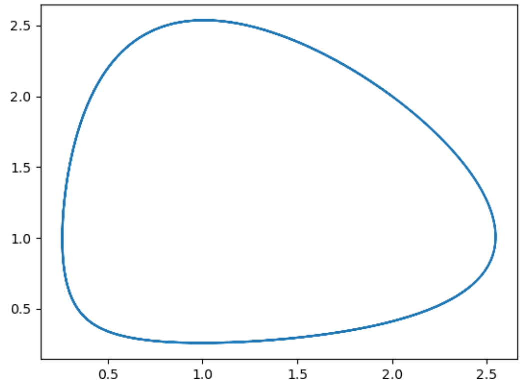
$\boxed{10}$ Finn ut hva som er feil og forklar hvilken figur man ser det fra.
(Hint: Sammenlikne med nivåkurvene til $f(x, y) = x + y - \ln|x| - \ln|y|$.)

Det finnes hundrevis av numeriske metoder for å løse ordinære differensiallikninger. **Symplektisk Euler** ser nesten ut som Eulers eksplisitte metode:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + hx_n\,(1 - y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + hy_n\,(x_{n+1} - 1)
\end{aligned}
$$

Men gir helt andre figurer:





$\boxed{11}$ Løs Lotka-Volterra med symplektisk Euler og sammenlikne med Eulers eksplisitte metode. Legg inn en evaluering av $f(x_n, y_n) = x_n + y_n - \ln|x_n| - \ln|y_n|$ i løkken, og plott denne som funksjon av t.

Hvis du har en andreordens differensiallikning, kan den skrives om til et første ordens system, og så er det bare å kjøre de samme numeriske metodene. La oss vise med pendelen. Vi lager oss bare noen nye variable der $\dot{\theta}$ er en egen variabel. Det vanligste er å bruke $p = \theta$ og $q = \dot{\theta}$, slik at systemet blir

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= q \\
\dot{q} &= -\frac{g}{l}\sin p
\end{aligned}
$$

$\boxed{12}$ Løs numerisk med eksplisitt og symplektisk Euler. Akkurat som for lotkavolterra, kan du evaluere den totale energien i hvert tidssteg.

En annen klassiker fra elektroteknikken er van del Pols likning:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Denne ble oppdaget av Balthasar van der Pol i forbindelse med radiorør, men modellerer også fint sprekker mellom kontinentalplater og nevronavfyring.

$\boxed{13}$ Løs van der Pol numerisk med $\mu = 2$, og plot x mot $\dot{x}$.

UKENS NØTTER

I gamle dager pleide barn å lære å løse separable differensiallikninger med penn og papir. Dette er en standardteknikk, men kan være ganske knotete. Se kapittel 5.4 i Arnes bok.

$\boxed{1}$ Utled løsningen

$$x(t) = \frac{kx_0 e^{at}}{k - x_0 + x_0 e^{at}}$$

til det logistiske problemet.

Det finnes ellers massevis av forskjellige numeriske metoder for å løse differensiallikninger. La

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

Da er Eulers implisitte metode gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n) \end{aligned}$$

og symplektisk Euler gitt ved Eulers implisitte metode:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_{n+1}, y_n) \end{aligned}$$

Her er et par andre. For eksempel Eulers implisitte metode

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned}$$

trapesmetoden

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}\right) \\ y_{n+1} &= y_n + h\left(\frac{g(x_n, y_n) + g(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}\right) \end{aligned}$$

og midpunktmetoden

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right) \\ y_{n+1} &= x_n + hg\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Prøv disse og. Du må nesten finne ut hvordan flervariable numeriske likningsløsere funker, se kapittel 9.18 i Arnes bok.

Det går også an å kjøre disse metodene (unntatt symplektisk Euler) på førsteordens differensiallikninger. (Altså ikke systemer av differensiallikninger.)

$\boxed{3}$ Prøv metodene over på den logistiske likningen, og sammenlikne med analytisk løsning.

LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{1}$ Det enkleste er å derivere uttrykket og sjekke at det passer i likningen. Hvis du vil vite hvordan man faktisk regner ut løsningen dersom man ikke vet hva den er, kan du lete opp informasjon om at den logistiske likningen er *separabel*. Dette betyr at vi kan få alle x-ene på den ene siden:

$$a = \frac{\dot{x}}{(1 - x/k)\,x}$$

delbrøksoppspalte høyreesiden:

$$\frac{\dot{x}}{(1 - x/k)\,x} = \frac{k\dot{x}}{(k - x)\,x} = \dot{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(k - x)}\right)$$

og så integrere med kjerneregelen:

$$at + C = \ln|x| - \ln|k - x| = \ln\left|\frac{x}{k - x}\right|$$

Eksponering gir

$$e^{at}e^{C} = \left|\frac{x}{k - x}\right|.$$

og hvis vi løser opp absoluttverditegnet på høyresiden, får vi

$$\begin{cases} \frac{x}{k-x} = -e^{at}e^{C} & x < 0 \\ \frac{x}{k-x} = e^{at}e^{C} & 0 < x < k \\ \frac{x}{k-x} = -e^{at}e^{C} & k < x \end{cases}$$

Nå gjelder det å være litt smart så vi ikke får masse unødvendig regning. La oss allerede nå bruke at $x(0) = x_0$. Vi får

$$\begin{cases} \frac{x_0}{k-x_0} = -e^{C} & x_0 < 0 \\ \frac{x_0}{k-x_0} = e^{C} & 0 < x_0 < k \\ \frac{x_0}{k-x_0} = -e^{C} & k < x_0 \end{cases}$$

slik at vi kan slå alt sammen tilbake til

$$\frac{x}{k - x} = \frac{x_0}{k - x_0}e^{at}$$

som løst for x gir

$$x(t) = \frac{kx_0e^{at}}{k - x_0 + x_0e^{at}}.$$

$\boxed{2}$ Dette blir på en måte litt i samme gata som oppgaven over, men man bare kommer ikke helt i mål. Vi deler likningene på hverandre og får

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{ax - bxy}{-cy + dxy} = \frac{x(a - by)}{y(dx - c)}$$

eller

$$\dot{x}\left(d - \frac{c}{x}\right) = \dot{y}\left(\frac{a}{y} - b\right)$$

som integreres til

$$dx - c\ln|x| = a\ln|y| - by + C.$$

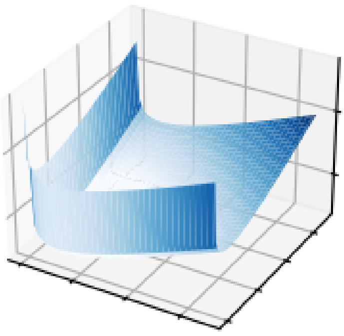
$\boxed{3}$ I økten om funksjoner plottet vi nivåkurvene til

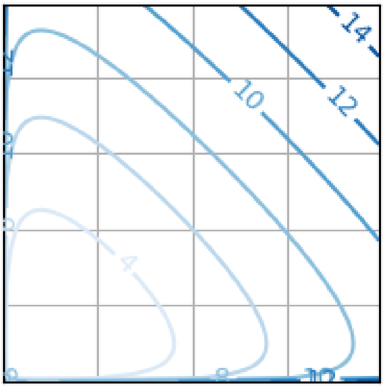
$$f(x,y) = dx + by - c\ln|x| - a\ln|y| - by$$

altså kurver på formen

$$dx + by - c\ln|x| - a\ln|y| - by = C.$$

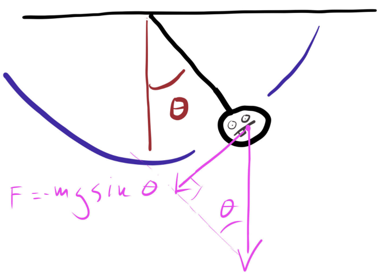
Dette var selvfølgelig for å bruke dem i denne oppgaven, og her har vi et plot av henholdsvis f og nivåkurvene til f:





De to likevektsløsningene er $x = y = 0$ (som betyr ingen levende dyr) og $x = c/d$, $y = a/b$ som er det punktet der bestandene balanserer hverandre perfekt.

$\boxed{4}$ Newtons andre lov er $F = ma$. Kraften er $-mg\sin\theta$ og akselerasjonen er $a = l\ddot{\theta}$, slik at Newtons andre lov blir



$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

eller

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

om du vil. Merk at massen til pendelen ikke har noe å si.

$\boxed{5}$ Hvis vi ganger opp med $ml\dot{\theta}$, får vi

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

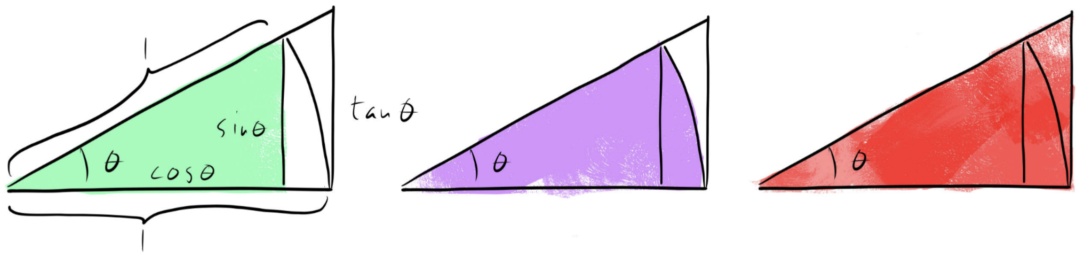
som integreres til (husk kjerneregelen!)

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = C$$

som vi kjenner igjen som summen av kinetisk og potensiell energi (pendelens opphengspunkt er satt som nullnivå). I fysikkboken på videregående skole (ihvertfall i den fysikkboken vi brukte) var Newtons lover og konservering av totalenergi presentert som uavhengige konsepter. Men det er altså slik at den algebraiske likningen som forteller at energien er konservert, er en slags "løsning" av Newtons andre lov, som er en differensiallikning. Kunnskap om differensiallikninger er følgelig essensielt for å forstå grunnleggende fysikk.

Hvis du synes det er uvant å integrere ledd som $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ med kjerneregelen, kan du prøve å derivere $\left(\dot{\theta}\right)^2$ og $\cos\theta$ og se hva du får. (Husk at θ er en funksjon av t, altså $\theta(t)$!)

6 Her gjelder det å kjenne til følgende figur.



Alle barn i barnehagen ser at det grønne arealet er minst, det røde størst, og det fiolette mellom dem. Det grønne arealet er

$$V_1 = \frac{\cos\theta \sin\theta}{2},$$

det fiolette

$$V_2 = \frac{\theta}{2}$$

og det røde

$$V_3 = \frac{\tan\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}.$$

Fra ulikheten $V_1 \leq V_2 \leq V_3$ får vi

$$\cos\theta \sin\theta \leq \theta \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Hvis vi antar at $\theta > 0$, og deler på $\sin\theta$, får vi

$$\cos\theta \leq \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

og snur vi denne på hodet, får vi

$$\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \cos\theta.$$

Siden

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$$

går de ytterste uttrykkene begge mot 1, og da skjønner alle barn i barnehagen at også

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Den formelle regelen jeg har brukt kalles "skviseregelen".[8] Dersom $\theta < 0$ blir argumentet helt likt, vi må bare tenke at arealene er negative og gjøre samme beregning.

7 Det karakteristiske polynomet er

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

som gir

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

og

$$\theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem

$\boxed{8}$ En hel runde av pendelens gang får vi når innmaten i de trigonometriske funksjonene over går fra for eksempel 0 til 2π. Med andre ord kan tiden T pendelen bruker på en periode kan hentes ut fra likningen

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi.$$

Du kan måle perioden til foucaults pendel ganske nøyaktig ved å filme en haug med perioder med telefonen din og telle dem og så bruke dette estimatet til å gå din vei og komme tilbake mange perioder senere (hvor mange avhenger av hvor bra estimat du sitter på) og filme et nytt tidspunkt og så videre. Jeg holdt på med dette en høst, og kom vel til at perioden var sånn ca. 10.075 sekunder, som gir en periode på om lag 25 meter og 25 centimeter. (Jeg skrev aldri ned usikkerheten, fy og fy.)

$\boxed{10}$ Løsningstrajektoriene skal jo ligge på kurvene

$$dx + by - c\ln|x| - a\ln|y| - by = C$$

men vi ser tydelig fra figuren til høyre at eksplisitt Euler ikke klarer dette.

$\boxed{11}$ Her er kode:
`folk.ntnu.no/mortano/lotkavolterra/`
for å få et plott av f evaluert på den numeriske løsningstrajektorien. I mappen finner du også rustkode om du liker det.

$\boxed{12}$ Se her:
`folk.ntnu.no/mortano/pendelen/`