1 - 4 - DIFFERENSIALLIKNINGER

I kvantitativ vitenskap er man fullstendig opphengt i dette med å finne den korrekte **mekanismen**.[1] I middelalderen trodde man visstnok at lus var bra for helsen siden syke folk har færre lus. Dette er et klassisk eksempel på sammenblanding av korrelasjon og kausalitet. Den korrekte mekanismen går antagelig motsatt vei. Syke folk får gjerne feber før de får andre symptomer, og lusen liker ikke den høye temperaturen, så de forlater verten før andre symptomer oppstår. Det første pålitelige termometeret ble oppfunnet i 1714,[2] og hvis du ikke kan måle feber, vil det se ut som om lusen ofte forlater verten *før* verten blir syk.[3]

Et av standardverktøyene for å kvantifisere den korrekte mekanismen når man først har funnet den, kalles **differensiallikninger**. Differensiallikninger er uunværlige for å modellere alle slags tidsavhengige prosesser i fysikk, kjemi, og biologi. I tidsavhengige prosesser bruker vi gjerne x (eller en annen passelig bokstav) for størrelsen som modelleres, t for den uavhengige variabelen, og en spesiell notasjon for den tidsderiverte, oppfunnet av Isaac Newton:

$$\dot{x}(t) = x'(t)$$

Differensiallikninger er subtile greier, og det er lurt å studere de enkleste av dem ganske nøye.

Her er den aller enkleste. Prokaryoter og mange typer sopp (for eksempel ølgjær) deler seg ved såkalt *avsnøring*; dette betyr at de kloner seg selv fra tid til annen.[4] *E. Coli* deler seg for eksempel omtrent hvert tjuende minutt ved vår kroppstemperatur 310 Kelvin. Dette vet vi fordi vi har oppfunnet både mikroskopet og klokken, og ideen er mer enn tilstrekkelig til å lage en kvantitativ modell.

La $x(t)$ være antall bakterier ved tiden t. Dersom bakteriene alltid deler seg i to etter det samme tidsintervallet, er *vekstraten* $\dot{x}(t)$ *proporsjonal med antall bakterier* $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

Proporsjonalitetskonstanten a skal vi se på senere.

$\boxed{1}$ Dersom $a = 1$, er likningen så enkel at selv barn i barnehagen kan løse den:

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

Finn en løsning.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Scientific_method
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Thermometer
[3] https://www.ecdc.europa.eu/en/all-topics-z/disease-vectors/facts/factsheet-lice-phthiraptera
[4] https://snl.no/celledeling

Hvis du slår opp i en tabell over derivasjonsregler, finner du nok regelen

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t$$

og hvis du ser nøye etter, ser du vel at dette i bunn og grunn er det samme som $\dot{x} = x$. Med andre ord passer $x(t) = e^t$ i likningen. Men det gjør også

$$x(t) = ce^t$$

der c er en vilkårlig konstant.

$\boxed{2}$ Dobbeltsjekk dette.

Vi har altså en hel familie av løsninger. Dette kan vi utnytte som følger. Dersom man har en petriskål full av bakterier og ønsker å spå hvor stor kulturen er etter så og så lang tid, må man starte med en kultur på en gitt størrelse. I matematikk kalles dette en **initialbetingelse** eller et **initialkrav**:

$$x(0) = x_0.$$

Kombinasjonen av en differensiallikning og en initialbetingelse kalles et **initialverdiproblem**.

$\boxed{3}$ Finn løsningen til initialverdiproblemet $\dot{x} = x$, $x(0) = 2$.

Som sagt deler *E. Coli* seg omtrent hvert 20. minutt ved vanlig kroppstemperatur, og

$$\dot{x} = ax \qquad x(0) = x_0$$

er en enkel modell for veksten. En bestemt verdi $x(t)$ kan du tenke på som totalt antall bakterier i et bestemt volum eller totalt antall bakterier per liter (altså konsentrasjon) eller arealet bakteriene dekker i en petriskål eller noe annet i den dur. Alt er lov så lenge det er korrekt, og du er konsistent. Dersom x_0 er totalt antall bakterier, er også $x(t)$ det.

$\boxed{4}$ Finn løsningen til $\dot{x} = ax$, $x(0) = x_0$.

Verdien til a er litt subtil; den avhenger av hva vi måler t i. Finn a for *E. Coli* dersom t måles i

$\boxed{5}$ timer $\boxed{6}$ minutter $\boxed{7}$ sekunder $\boxed{8}$ 20-minutters inkrementer (denne blir pen)

Hvis du synes alt dette er litt corny, kan du ta i betraktning denne videoen av bakterievekst: `https://www.youtube.com/watch?v=gEwzDydciWc`

$\boxed{5678}$ Stopp videoen om lag en gang i sekundet og tell antall bakterier på skjermen.

Styrken til differensiallikninger er at en og samme differensiallikning kan modellere vidt forskjellige fysiske prosesser. Dette hjelper oss til å klassifisere fysiske fenomener etter *oppførsel istedet for innpakning*. Nå tar vi en helt annen modell som leder til nøyaktig samme differensiallikning.

Første Mosebok postulerer at jorden er omtrent seks tusen år gammel. Hvis dette er sant, så er det noe galt med vår forståelse av grunnstoffet karbon. Karbon forekommer i tre isotoper som kalles C-12, C-13 og C-14. Alle har en atomkjerne som inneholder seks protoner, men kjernen kan i tillegg inneholde seks, syv eller åtte nøytroner. C-14 er et ustabilt isotop, og halveringstiden er på omtrent 5700 år, men andelen C-14 i atmosfæren ligger allikevel (på grunn av kosmisk stråling og et par atombombeprøvesprengninger) stabilt på omtrent ett atom per 10^{12}.

Siden du puster, utveksler du hele tiden karbon med atmosfæren, og derfor er andelen C-14 i kroppen din og i atmosfæren omtrent den samme. Når du dør blir du avskåret fra denne utvekslingen, og etter 5700 år vil C-14-andelen i kroppen din være omtrent halvert. Siden det finnes fossiler som har vesentlig lavere C-14-andel enn femti prosent, er jorden pent nødt til å være mye eldre enn 6000 år, med mindre alt er en konspirasjon og noen har plantet alle disse fossilene her for å lure oss. [5] Med andre ord: om du tror at jorden er 6000 år gammel, kan du ikke samtidig tro på kjernefysikk. Du er pent nødt til å velge en av dem.[6]

Radiokarbondatering modelleres av akkurat den samme likningen som *E. Coli*.[7] Dersom t måles i år og $x(t)$ er C-14-konsentrasjonen, tilfredsstiller x likningen

$$\dot{x}(t) = -\frac{\ln 2}{5700} x(t).$$

$\boxed{9}$ En død *Felis silvestris lybica*[8] inneholder omtrent en tiendedel av min C-14-konsentrasjon. (Jeg lever ennå.) Finn ut omtrent når dyret avgikk med døden.

[5] Se også https://snl.no/dendrokronologi og https://www.nature.com/articles/s41586-021-03972-8

[6] Jorden er faktisk ganske gammel: https://en.wikipedia.org/wiki/Uranium-lead_dating

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_dating

[8] *Felis silvestris lybica* er den ancestrale huskatten: https://en.wikipedia.org/wiki/African_wildcat

Egentlig burde den ukjente i forrige eksempel hete $\left[{}^{14}_{6}\mathrm{C}\right]$ (altså konsentrasjonen av C-14) og ikke x, men hvis du så din første differensiallikning i dag og så måtte dechiffrere likningen

$$\frac{d}{dt}\left[{}^{14}_{6}\mathrm{C}\right] = -\frac{\ln 2}{5700}\left[{}^{14}_{6}\mathrm{C}\right]$$

er det en sannsynglighet for at du ikke ville skjønne noe som helst bare fordi den ukjente hadde et annet navn enn det du var vant til. [9] Men nå skal vi se på enda en helt annen situasjon som gir opphav til den samme differensiallikningen, og da støter vi på et uungåelig notasjonsproblem.

La oss finne ut hvordan trykket varierer med høyden i en høy og tynn sylinder eller noe slikt dersom den er fylt av en ideell gass.[10] Nå er du blitt vant til at den ukjente størrelsen i en differensiallikning heter $x(t)$, men nå skal jeg sette opp en differensiallikning for trykket som funksjon av høyden, og du er antagelig vant til at trykket heter p og at høyden h, så da får det nesten bli $p(h)$ og ikke $x(t)$. Jeg skal bruke den ideelle gasslov[11]

$$pV = NTk$$

og dersom jeg hadde skrevet den

$$xV = NTk$$

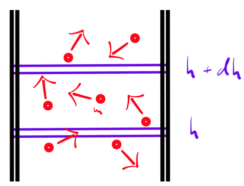
samt brukt t istedet for h for høyden, hadde noen garantert blitt forvirret av dette også.

Så da får det bli $p(h)$. Hvis vi antar at trykkforskjellen mellom h og $h+dh$ kun skyldes vekten av gassen mellom disse to høydene, kan vi skrive (trykket er naturligvis høyere ved h enn ved $h + dh$)

$$p(h) - p(h + dh) = \frac{mgN}{V}dh$$

der N er antall gassmolekyler mellom h og $h + dh$, m er massen til hvert molekyl, og g er tyngdeakselerasjonen. Jeg har også brukt at arealet av tverrsnittet kan skrives V/dh, der V er volumet mellom h og $h + dh$. La oss nå bruke den ideelle gasslov, og dele på dh:

$$\frac{p(h + dh) - p(h)}{dh} = -\frac{mgp}{Tk}$$



Dersom vi lar $dh \to 0$ og antar at T er konstant, får vi differensiallikningen

$$p'(h) = -\frac{mg}{Tk}p(h).$$

$\boxed{10}$ Anta at dette er en modell for trykket i atmosfæren, finn trykket som funksjon av høyden over havet, og sammenlikne med faktiske kurven. (Søk på nett.)

[9] Det går rykter om at det en gang var en instituttstyrer som satt ut et helt totimersmøte og trodde at diskusjonen handlet om auditoriet R2 i realfagsbygget, mens det i realiteten handlet som om faget R2 i videregående skole.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law

[11] Jeg skriver NTk istedet for NkT. Det er lettere å huske siden det rimer på "NTH"

Som sagt er styrken til differensiallikninger at en og samme likning kan brukes til mye forskjellig. Nå skal vi se på noe helt annet. Hvis vi setter $a = i$ og løser differensiallikningen

$$\dot{x} = ix$$

og antar at vi har lov til å herje med den imaginære enheten slik som vi herjer med alle andre tall, får vi jo

$$x(t) = ce^{it}$$

der c er en vilkårlig konstant.

$\boxed{11}$ Men sjekk at også

$$y(t) = \cos t + i \sin t$$

passer i likningen. Hvis jeg sier at det ikke finnes andre løsninger enn de på formen

$$x(t) = ce^{it},$$

hva slags konsekvenser har dette?

Dersom vi nå bare kompliserer ecoliradiokarbondateringatmosfæretrykkeulersformelsdifferensiallikningen litt og slenger på en konstant:

$$\dot{x} = ax + b$$

får vi en modell for et par helt andre ting.

$\boxed{12}$ Sjekk at

$$x(t) = ce^{at} - b/a$$

der c er en vilkårlig konstant, passer i likningen.

Den første modellen vi får er Newtons avkjølingslov:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_cooling`
La oss si at vi har en kokt elgtunge eller noe slikt med temperatur $T(t)$ som ved tiden $t = 0$ har temperaturen T_0, og så setter vi den inn i et kjøleskap med temperatur T_k. Newtons avkjølingslov sier at temperaturendringen $\dot{T}(t)$ er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom kjøleskapet og elgtungen:

$$\dot{T}(t) = \alpha\,(T_K - T(t)) \qquad T(0) = T_0$$

Proporsjonalitetskonstanten $\alpha > 0$ inneholder all informasjon om hvor fort varmeflyten går mellom elgtungen og omgivelsene, og varmekapasiteten til elgtungen og så videre. Det er lurt å holde tungen beint i munnen, sortere alt slik vi pleier, og se at dette er en likning på formen

$$\dot{x} = ax + b.$$

$\boxed{13}$ Dobbeltsjekk at løsningen er

$$T(t) = T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t}.$$

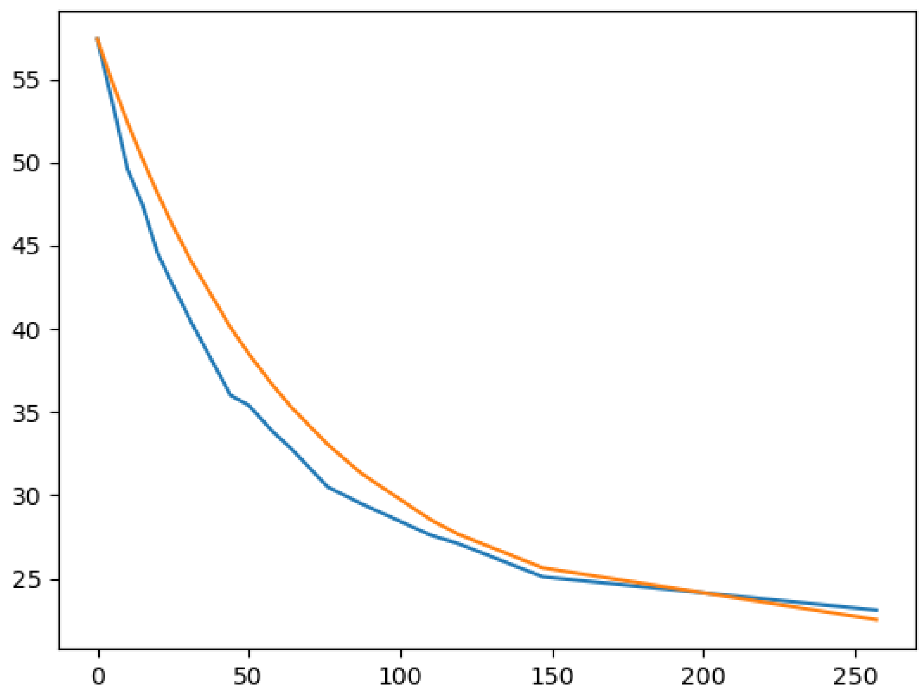
Jeg har brukt Newtons avkjølingslov med hell et par ganger når jeg skulle brygge øl og ikke hadde spiralkjøler. Vørteren må kjøles fra 373 til 298 Kelvin (da skal gjæren oppi), og dette tar noen timer. Dersom du måler temperaturen på minst to forskjellige tidspunkt, kan du estimere α og så gjøre et anslag på når temperaturen er riktig. Dette er gunstig, for da kan man gjøre noe annet i mellomtiden. Hvis du også vil lære å gjøre dette, kan du løse følgende gamle eksamensoppgaver i TMA4100.

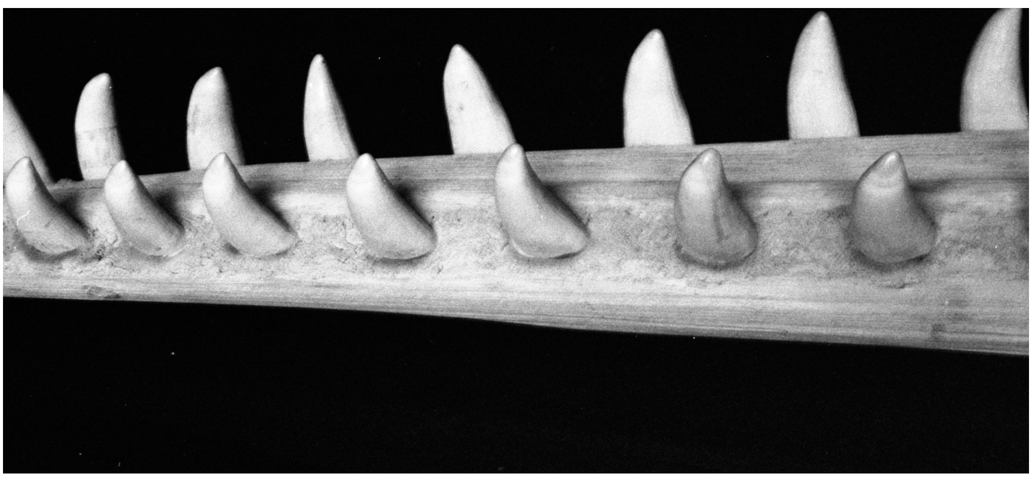
$\boxed{14}$ En elgtunge med temperatur 6°C settes på kjøkkenbenken. Etter to timer er temperaturen steget til 13°C, og lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Finn α og lag et plot av temperaturen.

$\boxed{15}$ Da temperaturen var 15°C, ble elgtungen satt inn igjen i kjøleskapet. En time senere var temperaturen i tungen sunket til 12°C. Hva var temperaturen i kjøleskapet? Anta samme α som i forrige oppgave.

Hvis du ikke tror på at Newtons avkjølingslov har noe for seg, kan du studere dette plottet av målte temperaturer (blå) i en liten rektangulær boks med vann som jeg lot avkjøle på kjøkkenbenken en tidlig morgen her i Vallegata 8 i Norges hippeste strøk St. Hanshaugen. Den første temperaturmålingen var 57.4 grader, og temperaturen i rommet var stort sett 21.8. De små uregelmessighetene i kurven skyldes antagelig det dårlige termometeret mitt og litt unøyaktige tidspunkt for målingene. Jeg slurva litt med dette i begynnelsen. I tillegg ser det ut til at formen på Newtons avkjølingslov bommer litt på stigningen på begynnelsen. Jeg vil gjette på at det har med fordampning å gjøre (Newtons avkjølingslov tar ikke høyde for dette, og vann fordamper raskest ved høy temperatur), men jeg er ikke helt sikker.

Mer realistisk 15 Finn ut omtrent hva α (som gir den oransje kurven i plottet) er i dette tilfellet. (Dette kan gjøres på flere måter; du lærer om det til våren.)





Og nå over til noe helt annet. La oss begynne med en digresjon. James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme. Han formulerte dette som noen og tyve ymse empiriske regler, og Oliver Heaviside kondenserte alt ned til fire likninger, som kan skrives enten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot dS &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} \\ \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot dS &= 0 \\ \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot dS \\ c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot dS \end{aligned}$$

Likningene kalles henholdsvis Gauss' lov, Faradays induksjonslov, Gauss' lov for magnetisme og Amperes lov. Dette er et koblet sett med partielle differensiallikninger, der

- $\mathbf{E}$ er det elektriske feltet
- $\mathbf{B}$ er det magnetiske feltet
- c er lyshastigheten i vakuum
- ρ er en gitt ladningstetthet
- $\mathbf{J}$ er en gitt strømtetthet
- ϵ_0 er permittiviteten i vakuum

Når du setter deg på en stol, vil du merke tydelig at det er sterke elektriske krefter mellom molekylene som hindrer den i å knekke sammen under vekten din, og Maxwells lover beskriver disse kreftene kvantitativt. Litt forenklet kan vi si at målet med denne matematikkundervisningen er å forstå alle de rare symbolene i likningene. Dette er et stort arbeid som tar om lag fire semestre.

Nå skal vi ta en tur innom en av Maxwells lovers viktigste forenklinger, nemlig *kretsteori*. Kraften mellom to punktladninger q_1 og q_2 i tomt rom er gitt ved

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

der r er avstanden mellom ladningene og ϵ_0 er den samme permittiviteten i vakuum som i Maxwells lover. Ladningene q_1 og q_2 måles i C, Coloumb, og uttrykket over kalles **Coloumbs lov**.[12] Denne loven ble oppdaget eksperimentelt av forskjellige personer på 1700-tallet, men Charles-Augustin de Coloumb skrev den ned korrekt som førstemann i 1785. Loven kan utledes fra Maxwells første likning over (altså Gauss' lov), og det skal vi gjøre neste år, men i skrivende stund er dette for komplisert for oss. Et elektron har ladning på omtrent $1.60217663 \cdot 10^{-19}$ C, så kraften mellom to elektroner på en meters avstand er på om lag 10^{-27} N. Til sammenlikning er gravitasjonskraften mellom de samme elektronene på om lag 10^{-73} N.

Siden det finnes kraft mellom ladde partikler, finnes det også potensiell energi mellom ladde partikler. Det foretrukne målet er **volt**, altså joule per coloumb, og størrelsen kalles **spenning**. Dette tallet forteller hvor mange J potensiell energi en ladning på 1 C (tenk på en klump med 10^{19} elektroner) har i forhold til et annet punkt i rommet. Et 9 volts batteri har spenning på om lag 9 volt mellom terminalene. [13]

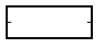
[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's_law`

[13] Den endrer seg etterhvert som batteriet blir utladet.

En **krets** er en strømledning med noen **kretselementer**. Et kretselement er en dings der det finnes en relasjon mellom strømmen $i(t)$ gjennom dingsen og spenningen $v(t)$ over den. De tre viktigste elementlovene er **motstand**:

$$v(t) = Ri(t)$$

R



der R kalles *motstandsverdien*, **spole**:

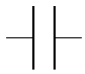
$$v(t) = Li'(t)$$

L

der L kalles *induktansen*, og **kondensator**:

$$v(t) - v(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds$$

C



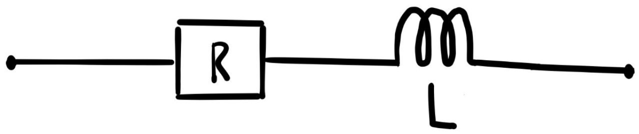
der C kalles *kapasitansen*,

En motstand kan du tenke på som en gammeldags lyspære som lyser og avgir varme.[14] En spole er bare en strømledning som er lagt i spiral; trafoen oppe i gaten din er full av disse.[15] En kondensator kan du tenke på som en ting som kan lagre elektrisk energi og slipper den ut igjen, ikke helt ulikt et batteri, men med litt annen oppførsel.[16] Faktisk er kondensatorer et godt alternativ til batteri i noen anvendelser.[17] Hvis du går MTKJ og synes det var litt mye om elektriske komponenter, kan jeg opplyse om at dette er viktig i elektrokjemi, bare spør Svein, han driver med dette på ordentlig.

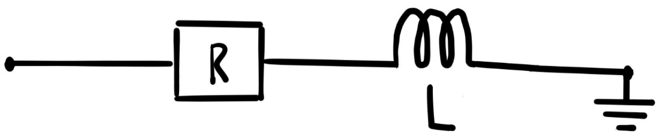
16 Nå bør du antagelig ta deg en runde på nett eller på biblioteket og lese litt rundt. Dette er ikke gjort i en venstrehåndsvending å huske.

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Resistor
[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor
[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor
[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Supercapacitor

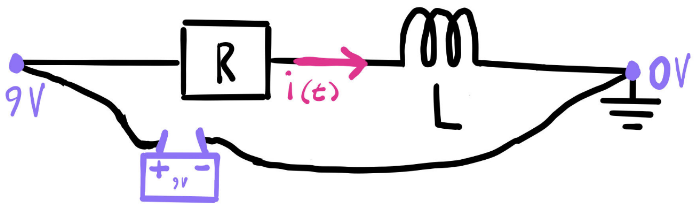
Men tilbake til differensiallikninger. La oss nå sette en motstand og en spole i serie slik:



Så må vi bestemme oss for nullnivået for spenning. Dette kalles *jord*, og indikeres slik:



Hvis vi nå kobler et batteri, altså en noenlunde konstant spenning, mellom endepunktene, vil det begynne å gå strøm:



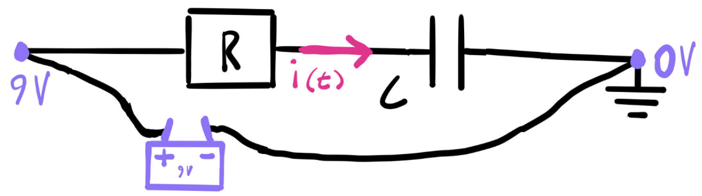
Dette kalles en *RL-krets*, og vi kan finne strømmen $i(t)$ ved å sette opp en differensiallikning. Spenningen mellom de to lilla punktene er 9 volt, og det spiller ingen rolle om vi går via batteriet eller de to seriekoblede kretselementene. Dette kalles **Kirchhoffs spenningslov**, og gir at

$$Li'(t) + Ri(t) = 9$$

$\boxed{17}$ Finn strømmen. (Du kan anta at $i(0) = 0$.)

Vi kan gjøre det samme med en kondensator:

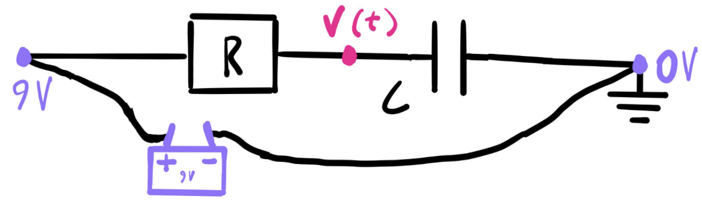
Setter vi på et 9 volts batteri, vil det også nå gå strøm i kretsen:



Dette kalles en RC-krets, og på samme måte som for RL-kretsen, kan vi sette opp en likning ved å kreve at spenningen mellom de to lilla punktene er det samme over batteriet som over seriekoblingen av elementene:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds = 9$$

Huff og huff, integrallikninger har vi ikke lært å løse. Det er nok best å gjøre litt om her og sette kondensatorspenningen opp som ukjent istedet:



Dersom vi antar $v(0) = 0$, er den ukjente gitt ved

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds$$

og følgelig er

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{C}i(t)$$

slik at differensiallikningen blir

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9.$$

$\boxed{18}$ Finn $v(t)$. (Husk at $v(0) = 0$.)

$\boxed{19}$ Modellerer uten prediktiv kraft er verdt null og niks. Få tak i en person med elsyskoffert og få vedkommende til å koble opp denne kretsen, kjør eksperimentet og regn og mål og dobbeltsjekk at dette er sånn omtrent riktig. *Den svarte pinnen på multimeteret skal på jord, og den røde på* $v(t)$.

RC- og RL-kretsen er styrt av nøyaktig samme differensiallikning som Newtons avkjølingslov og E. Coli og radioaktiv nedbrytning og alt det der, til tross for at virkemåten for spole og kondensator er helt forskjellig fra hverandre og fra avkjøling og bakterievekst. På de foregående ti sidene har du grunnen til å lære matematikk i et nøtteskall - et og samme initialverdiproblem

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \qquad x(0) = x_0$$

med løsning

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}$$

er en modell for så mange forskjellige ting at det er galskap å prøve å bli ingeniør uten å lære seg dette så godt at du kan drive med det i søvne.

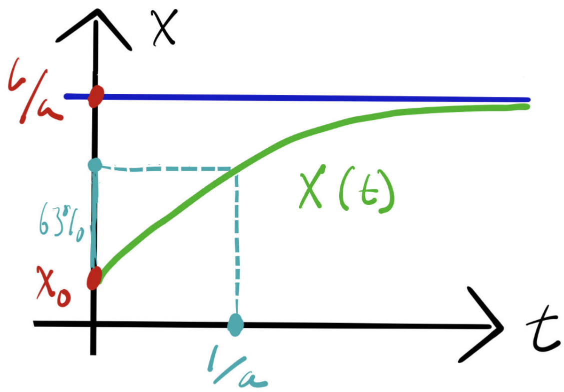
Gode matematikere er som regel systematiske av seg (ikke jeg), og foretrekker av ymse grunner å bytte fortegn på a og sortere likningen slik at alt som involverer den ukjente x står på den ene siden av likningen:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = b$$

Løsningen blir da

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

istedet. Til høyre er et generisk plot.



Siden $1/e \approx 0.36787944117$, ser vi dersom vi setter $t = 1/a$, har x gått om lag 63 prosent av veien opp til b/a. Derfor kalles $1/a$ **tidskonstanten** til differensiallikningen.[18] Initialverdiproblemet vi herjer med nå kalles forresten et LTI-system (Lineært TidsInvariant system)[19] og hvis du sier til en gammel ingeniør at du har et LTI-system med tidskontant sånn og sånn, vil figuren over umiddelbart dukke opp vedkommendes hjernebark. I radioaktiv nedbrytning kalles tidskonstanten *nedbrytningskonstanten*.

$\boxed{20}$ Finn tidskonstantene til alle problemene du har løst så langt.

[18]https://en.wikipedia.org/wiki/Time_constant
[19]https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_time-invariant_system

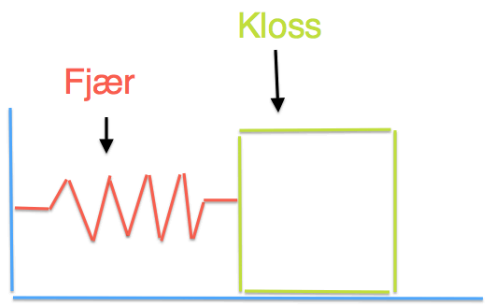
La oss nå komplisere det litt. På skolen lærte du Newtons andre lov $F = ma$. Dette er egentlig en differensiallikning, men på skolen ble du ikke plaget med annet enn konstante krefter. Vi skriver enten

$$F(x) = m\ddot{x} \qquad \text{eller} \qquad F(x) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right).$$

Du tenker sikkert at det er rart å ha en derivasjon på massen, men Newtons andre lov sier at kraft skal være lik endring i bevegelsesmengde, og dersom du for eksempel reiser i en ting som bruker drivstoff, endrer massen seg betraktelig etterhvert som du reiser. For raketter, der drivstoffet er en betydelig del av totalvekten, er dette viktig. Vi skal ikke plages med variabel masse inntil videre, så la oss konsentrere oss om

$$F(x) = m\ddot{x}.$$

Du tenker kanskje at det er snodig at kraften avhenger av den ukjente, men dette er vanlig i fysikk. Her er en klassiker. En kloss sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær. Hookes fjærlov sier at kraften fra fjæren på klossen er proporsjonal med hvor langt fjæren er strukket:



$$F(x) = -kx$$

Nå er x hvor langt fjæren er strukket eller komprimert, $k > 0$ er en konstant som avhenger av fjærens stivhet, og $F(x)$ er kraften fra fjæren på klossen. Dersom $x(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $\ddot{x}(t)$, og Newtons andre lov blir

$$-kx(t) = m\ddot{x}(t),$$

der $m > 0$ er klossens masse.

Vi skriver vanligvis

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

og du kan sjekke løsningen er

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Dette systemet kalles en harmonisk oscillator, og løsningen er en bevegelse som aldri stopper opp. Hvis vi skal beregne en faktisk løsningstrajektorie, må vi vite noe om både startposisjon og startfart. Finn x dersom

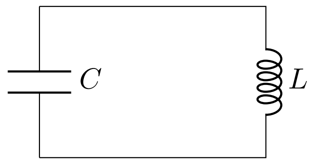
$\boxed{21}$ $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = 0$. $\boxed{22}$ $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = 1$. $\boxed{23}$ $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$.

And now for something completely the same. Kirchhoffs spenningslov sier at spenningsfallet over en lukket sløyfe i en elektrisk krets alltid må være null:

$$\sum_k v_k = 0$$

I likhet med Newtons andre lov, er dette også en differensiallikning dersom du har spoler eller kondensatorer i kretsen. Det har man alltid, for alle kretser har bittelitt tilsiktet eller utilsiktet kapasitans og induktans.
Kirchhoffs spenningslov på kretsen til høyre gir

$$L\dot{i}(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\, ds = 0$$



og deriverer vi hele greia, får vi

$$L\ddot{i}(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0,$$

som har løsning (sjekk selv)

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Dette systemet er også en harmonisk oscillator, og matematisk identisk med fjæren og klossen. Om du bare fikk løsningstrajektorien i et plot og ingen informasjon om hva det var for noe, er det ikke mulig å gjette om løsningen kommer fra en spole og kondensator eller en fjær og en kloss. Dersom du går i skuffen din og plukker opp en kondensator og en spole og setter dem sammen, skjer det nok ikke så mye, og dette reflekteres av at $x(t) = 0$ (som detter ut når $c_1 = c_2 = 0$) passer i differensiallikningen.

Den enkleste formen for kondensator er to plater som er fysisk adskilte, men laget av et metall som kan fylles opp med elektroner. Proporsjonalitetskonstanten C måles i coloumb per volt, og avhenger av størrelsen på kondensatorplatene, hva de er laget av, hvor langt de står fra hverandre og så videre. Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er måkt inn på den siden $t = 0$:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\, ds$$

Med andre ord kunne vi jo tenke at vi ladet den opp med et batteri først og så koblet av batteriet og så koblet kondensatoren i sløyfe med en spole mens det av spenning på den. Da vil strømmen begynne å gå i kretsen, og denne vil oppføre seg etter differensiallikningen over. Finn $i(t)$ dersom

$\boxed{21}$ $i(0) = 1$ og $\dot{i}(0) = 0$. $\boxed{22}$ $i(0) = 0$ og $\dot{i}(0) = 1$. $\boxed{23}$ $i(0) = i_0$ og $\dot{i}(0) = v_0$.

Så nå vet du om en haug med forskjellige fysiske modeller, og det bør etterhvert være klart at en og samme differensiallikning kan ha mange mange bruksområder. Mange fysiske fenomener oppfører seg altså dønn likt fra et matematisk perspektiv.

Til nå har jeg bare slengt opp masse likninger og sagt hva løsningen var og bedt deg sette løsningene inn i likningene for å sjekk at alt er riktig. Nå skal vi se på hvordan man faktisk finner løsninger. Det er ganske mange fysiske modeller som resulterer i **den første ordens likningen**

$$a\dot{x} + bx = c$$

eller **den andre ordens likningen**

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$$

der a, b, c og d er konstanter, så du kommer veldig langt med å vite hvordan man løser disse. La oss begynne med å gjøre litt om på konstantene, det er litt vel mange av dem. Vi kan trygt dele ut a eller sette $a =$. Dette er gunstig, for hvis a skulle slumpe til å bli null, vil den andre likningen degenerere til den første, og den første degenerere til en algebraisk likning, og det vil lage rot i systemet. Det er også gunstig å prøve å bruke samme bokstav til samme greie, så jeg tror vi omdøper litt i den første ordens likningen, og skriver

$$\dot{x} + cx = d \qquad \text{og} \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$$

Strategiene for å løse disse likningene er identiske (de funker også på høyere orden enn to), men det er mer knot med den andre ordens likningen. Strategien er som følger:

1: sett $d = 0$ og finn alle eksponensialfunksjoner som passer i den resulterende likningen

2: legg til konstanten d/c

3: bruk eventuelle initialkrav

$\boxed{24}$ Skriv opp løsningen til $\dot{x} + cx = d$ med initialkrav $x(0) = x_0$.

Vi begynner med steg én, setter $d = 0$ og leter etter alle løsninger på formen

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

En genial hjerne har en gang tenkt at dette fører frem, og det er lett å sjekke at det går bra. Man setter inn i likningen

$$\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0$$

og observerer at siden $e^{\lambda t} \neq 0$, kan vi dele denne ut, og få

$$\lambda + c = 0$$

som kalles **den karakteristiske likningen**. Denne har løsning $\lambda = -c$, og hvis vi nå har gjort alt riktig, er konklusjonen at

$$x(t) = e^{-ct}$$

er en løsning av likningen uansett. Siden uttrykket

$$T(x) = \dot{x} + cx$$

er en lineæroperator, må også

$$x(t) = Ae^{-ct}$$

være en løsning uansett verdi på konstanten A. Vi fortsetter med steg to. Løsningen til

$$\dot{x} + cx = d$$

er

$$x(t) = Ae^{-ct} + \frac{d}{c}$$

der A er en vilkårlig konstant. Til slutt krever vi $x(0) = x_0$:

$$x_0 = x(0) = A + \frac{d}{c}$$

og dette gir $A = x_0 - d/c$, slik at

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{d}{c}\right) e^{-ct} + \frac{d}{c}.$$

Ok, dette var grei skuring. Men hva med

$\boxed{25}$ løsningen til $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$ med initialkrav $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$? .

Samme triks, sett $d = 0$ midlertidig og anta

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Dette har noen oppdaget. La oss lete litt etter λ. Vi setter inn x i likningen, og får

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0.$$

Vi vet som sagt at $e^{\lambda t} \neq 0$, som gir den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

med løsninger

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Forskjellen fra i sted er at den karakteristiske likningen alltid har to løsninger, og da får vi tre tilfeller, alt etter fortegnet på $b^2 - 4c$. For å forenkle notasjonen lar vi

$$\delta = -\frac{b}{2} \qquad \text{og} \qquad \omega_0 = \left|\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right|.$$

og du kan selv sjekke at følgende løsninger passer i likningen:

1: Dersom $b^2 - 4c > 0$ blir det enkelt, da finnes det to reelle røtter

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \delta \pm \omega_0$$

slik at
$$x(t) = A_1 e^{(\delta+\omega_0)t} + A_2 e^{(\delta-\omega_0)t} + d/c = e^{\delta t}\left(A_1 e^{\omega_0 t} + A_2 e^{-\omega_0 t}\right) + d/c.$$

2: Dersom $b^2 - 4c = 0$, finnes det en dobbel rot $\lambda = \delta$, og løsningen blir

$$x(t) = A_1 e^{\delta t} + A_2 t e^{\delta t} + d/c.$$

3: Dersom $b^2 - 4c < 0$, er løsningen til den karakteristiske likningen

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i = \delta \pm i\omega_0$$

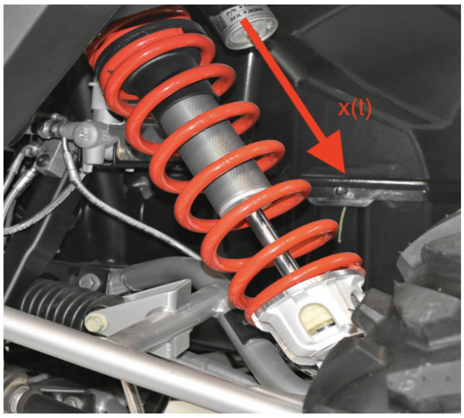
slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(\delta+i\omega_0)t} + A_2 e^{(\delta-i\omega_0)t} + d/c \\ &= e^{\delta t}\left(A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}\right) + d/c \\ &= e^{\delta t}\left(B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t)\right) + d/c. \end{aligned}$$

der (husk at $e^{it} = \cos t + i \sin t$)

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + A_2 \\ B_2 &= i\,(A_1 - A_2) \end{aligned}$$

La oss lage oss et fysisk eksempel som er lett å huske og lett å forstå, nemlig Newtons andre lov anvendt på støtdemperen på en bil. En masse m med vertikal posisjon x hviler på en fjær med fjærstivhet k. Massen blir trukket nedover av tyngdekraften mg, og inni fjæren sitter en støtdemper som for enkelhets skyld bidrar med en friksjonskraft som er proporsjonal med $\dot{x}$ og rettet mot fartsretningen. (Friksjon er kompliserte greier, så i virkeligheten er nok dette leddet mer noe mer grisete.) Newtons andre lov sier at masse ganger akselerasjon skal være lik summen av disse tre kreftene, og hvis vi sier at positiv x-retning er nedover, får vi



Kilde: howstuffworks.com

$$m\ddot{x} = -k\ddot{x} - \mu\dot{x} + mg.$$

Hvis vi nå sorterer alt etter konvensjonen, med alle ledd som involverer den ukjente på den ene siden og alt annet på den andre siden, får vi

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = mg.$$

Nå deler vi på m, og får

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

slik at $b = \mu/m$, $c = k/m$ og $d = g$.

Nå skal vi analysere litt. La oss begynne med å beregne **likevektsløsningen**, altså den konsante x-verdien som passer i likningen. Dette er punktet der systemet "helst vil være". Konstanten som passer i likningen er

$$x = \frac{d}{c} = \frac{mg}{k}$$

og dette gir fysisk mening. Hvis du har en stor masse på en svak fjær, vil likevektsposisjonen ligge lavt, og omvendt.[20]

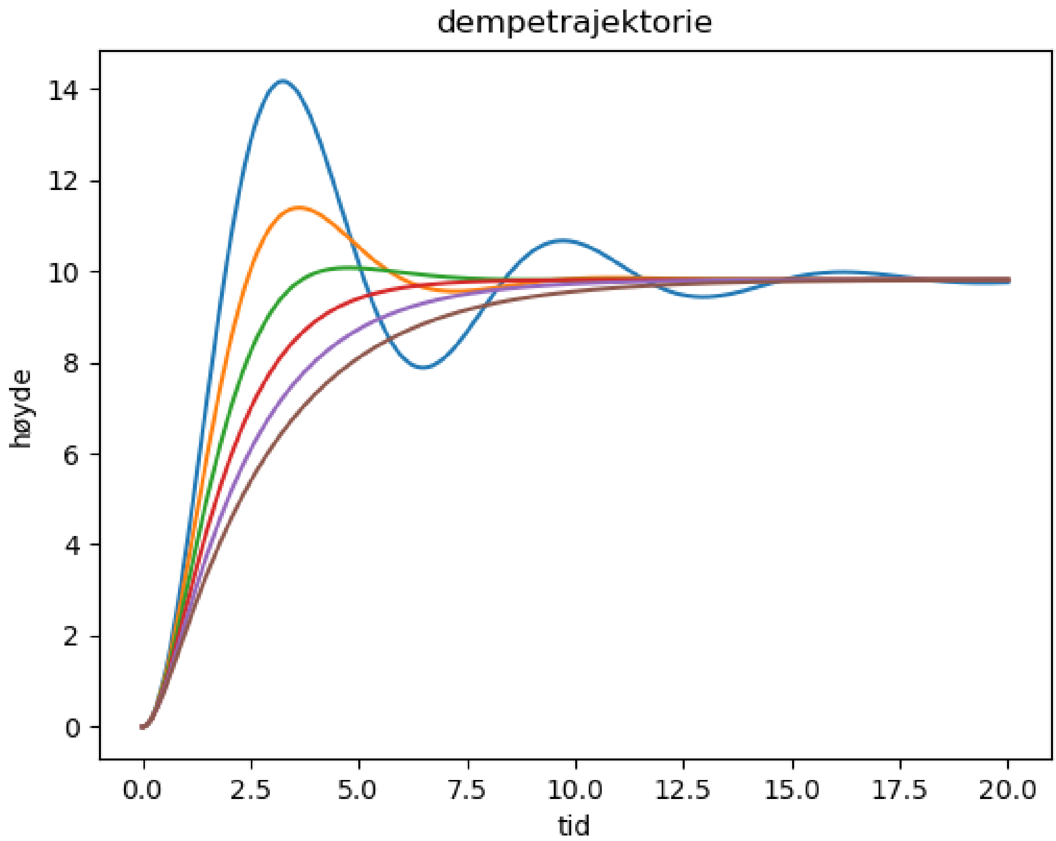
Nå skal vi gjøre et regneeksperiment. La oss si at fjærstivheten k er perfekt tilpasset massen m, men at vi varierer dempingen μ. Dette svarer til at vi lar b variere, men holder c fast. For enkelhets skyld kan vi si at massen og fjærstivheten begge er lik en, slik at vi får likningen

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = g.$$

$\boxed{26}$ Regn ut løsningen og plott den for $\mu = 3$, $\mu = 2$ og $\mu = 1$. Bruk initialkrav $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Etterpå kan du slå opp i kapittel 2.4 i Kreyszig.

[20] Det er viktig at fjæren er tilpasset massen som skal hvile på den, men det er litt slingrinsmonn; lastebiler har luftfjæring, slik at man kompensere for den store vektforskjellen mellom med og uten last, og en moderene SUV har gjerne luftfjæring for å kunne regulere bakkeklaringen.

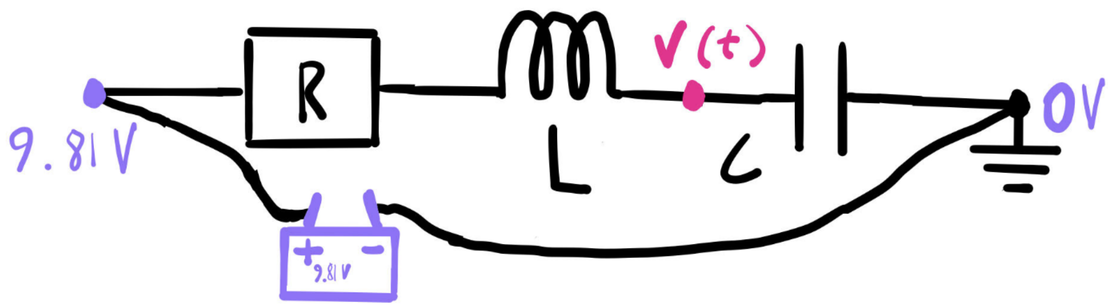
Initialkravene $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ betyr at vi setter i gang systemet fra den posisjonen der fjæren hverken er komprimert eller strukket. Du kan tenke at vi jekker opp bilen til det punktet det ikke er noen vekt på fjæren, og så sjekker vi hvordan systemet reagerer ved å slippe den raskt ned igjen, for eksempel ved å ta jekken brått vekk. Her er plot av løsninger for $\mu = 1/2$ (blå), $\mu = 1$ (oransje), $\mu = 3/2$ (grønn), $\mu = 4$ (rød), $\mu = 5/2$ (lilla) og $\mu = 3$ (brun):



Det er vanlig å kalle de tre tilfellene $\mu < 2$, $\mu = 2$ og $\mu > 2$ for **underkritisk dempet**, **kritisk dempet** og **overkritisk dempet**, henholdsvis. Dette korresponderer til de tre løsningsvariantene.

$\boxed{27}$ Omtrent hvilken verdi for μ tror du EU-kontrolløren vil ha for å godkjenne demperen?

Den store fordelen med å kjenne til et slikt fysisk eksempel som demperen over, er at hele historien kan gjenbrukes. Hvis du har skjønt spole, kondensator og motstand og Kirchhoffs spenningslov, skjønner du at dersom du plukker ut en hver av disse kompontene fra skuffen din, kobler dem i serie med et batteri slik:



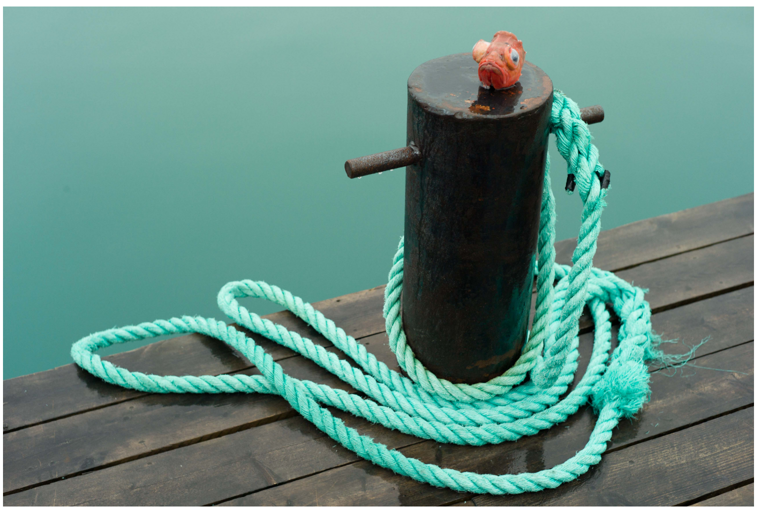
så er dette det samme som å løse initivalverdiproblemet

$$L\ddot{v}(t) + R\dot{v}(t) + \frac{1}{C}v(t) = 9.81.$$

Hele analysen kan altså gjenbrukes uten modifikasjon, man må bare skjønne at induktansen L korresponderer til massen m, den omvendte kapasitansen $1/C$ til fjærstivheten, og motstandsverdien R til dempingen. Dersom du vil forklare hvordan en RCL-krets funker til en person som ikke er i stand til å regne på dem selv, kan du bare bruke denne analogien. (Det funker, jeg har prøvd.)

Alt dette forklarer forresten ideen bak en *analog datamaskin*. Istedet for å bygge mange dyre fjærer og dempere og sette dem sammen for å teste, kan du sette sammen en ekvivalent RCL-krets og gjøre empirisk testing på den. Hvis du vil teste noen endringer i et eller annet, finner du bare ut hvordan RCL-kretsen må endres og så tester du den istedet. I gamle dager var dette et viktig ledd i arbeid med prototyper, spesielt innen luftfart, der alle komponenter er dyre å produsere.

$\boxed{28}$ Finn en person med elsyskoffert, sett sammen RCL-kretsen over, og se om du greier å reprodusere plottet på forrige side med et oscilloskop eller noe slikt.



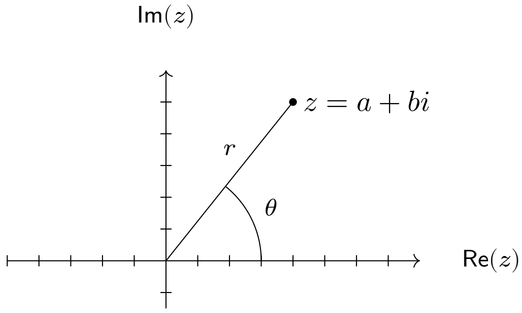
MER OM KOMPLEKSE TALL

Richard Feynman kalte Eulers formel "vår juvel". Den regnes for å være særdeles vakker:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Husk at r avstanden fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og at θ er vinkelen z gjør med den reelle aksen. Alle barn i barnehagen vet at

$$a = r\cos\theta \quad \text{og} \quad b = r\sin\theta$$



Polare koordinater

Med Eulers formel kan vi forbedre dette ganske betraktelig:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Følgende oppgave passer egentlig best i første klasse på gymnaset, men vi tar den med allikevel.

$\boxed{1}$ Skriv $z = 1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$ på polar form.

Nå er det ikke innlysende at vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen gjelder når det står en i i eksponenten, men de gjør det. Polar form er praktisk når man skal gange og dele komplekse tall for hånd. La

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{og} \qquad w = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$\boxed{2}$ Anta vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen, og beregn

$$z \cdot w \quad \text{og} \quad \frac{z}{w}$$

$\boxed{3}$ Finn $e^{\pi i/2}$, $e^{\pi i}$, $e^{3\pi i/2}$ og $e^{2\pi i}$.

De geometriske tolkningene som Eulers formel gir oss, og sammenhengen med de trigonometriske funksjonene, er viktig, spesielt om du skal drive på med signalbehandling eller liknende. Vis at

$\boxed{4}$ $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ $\boxed{5}$ $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ $\boxed{6}$ $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$\boxed{7}$ Kan du si noe om $\overline{z}$?

Husk ellers at

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$\boxed{8}$ Vis at

$$\cosh(ix) = \cos x \qquad \text{og} \qquad \sinh(ix) = i\sin x$$

og bruk det til å vise at

$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$
$$\sin(a + bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

NØTTER

Da jeg var student, syntes jeg alt dette var litt irriterende, for jeg skjønte ikke hvordan man kunne være sikker på at det ikke fantes noen andre løsninger. Løsningen til

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = x_0$$

er

$$x(t) = x_0 e^{-at}.$$

og dette er faktisk den eneste løsningen. Dette ser man som følger. Anta at du har en annen løsning y som tilfredsstiller det samme initialverdiproblemet. Dersom vi deriverer $e^{at}y(t)$, får vi

$$\frac{d}{dt} e^{at} y(t) = a e^{at} y(t) + e^{at} \dot{y}(t) = e^{at} \left(a y(t) + \dot{y}(t) \right) = 0$$

slik at $e^{at}y(t)$ en konstant funksjon:

$$e^{at} y(t) = K$$

Altså er

$$y(t) = K e^{-at}.$$

Siden $y(0) = x_0$, må $K = x_0$, og vi ser nå at $y(t) = x_0 e^{-at} = x(t)$. Med andre ord kan det ikke finnes en annen funksjon som tilfredsstiller det samme initialverdiproblemet, og vi sier at løsningen er entydig. Det er ikke alltid at løsningen til en differensiallikning er entydig.

$\boxed{1}$ Initialverdiproblemet

$$\dot{x} - \sqrt{x} = 0 \qquad x(0) = 0$$

har flere løsninger. Finn to av dem.

$\boxed{2}$ Fallskjermlikningen

$$\dot{v} = 1 - v^2$$

er en separabel likning som modellerer farten til en fallskjermhopper. Løs likningen med forskjellige initialkrav, plott løsningene oppå hverandre, og forklar hva som skjer.

$\boxed{3}$ Løs den logistiske likningen

$$\dot{x} = a(b - x)x$$

med initialkrav $x(0) = \frac{1}{5}$.

Likningen

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

løses med å gange med integrerende faktor, se kap. 7.9 i Adams.

$\boxed{4}$ Løs Newtons varmeproblem

$$\dot{T}(t) + \alpha \left(T(t) - T_K \right) = 0 \qquad T(0) = T_0,$$

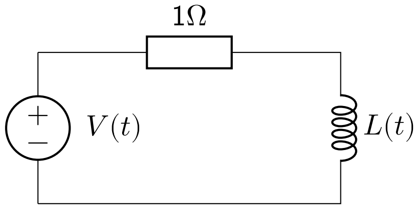
med integrerende faktor.

$\boxed{5}$ Løs kretsproblemet

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) = \cos t \quad i(0) = 0$$

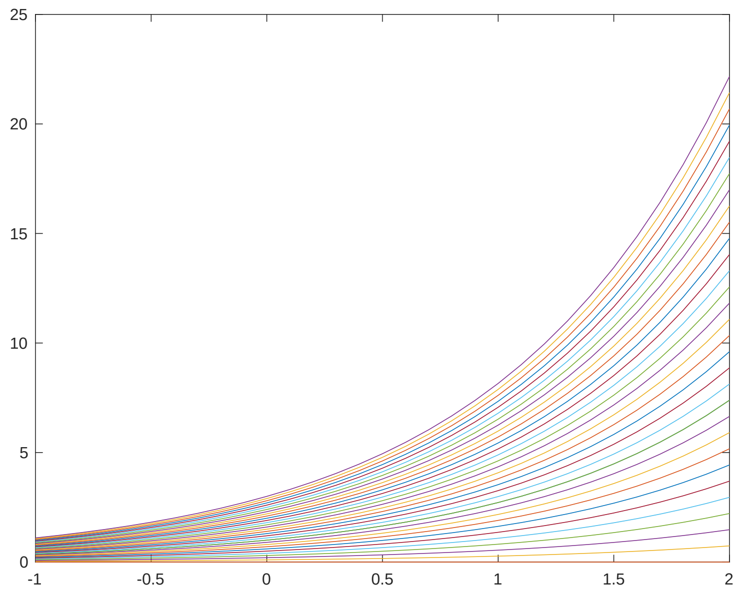
med integrerende faktor.

6 I kretsen under er det en spole med variabel induktans:
https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor#Variable_inductor
Spenningskilden er også variabel. Laurentius Lie dreier på knappen til spolen slik at $L(t) = t$ og på spenningskilden slik at $V(t) = t$. Finn strømmen i kretsen, gitt at det ikke går strøm ved $t = 1$.



LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{1}$ Likningen sier at funksjonen skal være sin egen derivert. Det finnes bare en slik funksjon, og det er $x(t) = e^t$. Nei, vent, vi kan visst gange med en konstant og, så det korrekte svaret er $x(t) = Ce^t$. Dette er strengt tatt en uendelig familie av løsninger. Problemet får ikke en entydig løsning før vi setter på et initialkrav, se neste oppgave. Her plot for tredve forskjellige verdier av C:



$\boxed{4}$ Den enkleste måten å løse en så enkel differensiallikning på, er nok å skyte fra hoften og ta en kvalifisert gjetning på at løsningen er på formen

$$x(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Det er enkelt å teste om hypotesen er riktig. Man setter funksjonen inn i likningen

$$C\lambda e^{\lambda t} = Cae^{\lambda t}$$

og observerer at først at $C \neq 0$ (siden dette er en ganske uinteressant løsning, og dessuten ikke kan tilfredsstille $x(0) = x_0$ dersom $x_0 \neq 0$), og så at $e^{\lambda t} \neq 0$ (vi vet jo foran og bak på eksponensialfunksjonen), og at vi derfor kan dele begge disse ut og få

$$\lambda = a$$

som kalles **den karakteristiske likningen**. Denne har løsning $\lambda = a$, og hvis vi nå har gjort alt riktig, er konklusjonen at

$$x(t) = Ce^{at}$$

er en løsning av likningen uansett hva A er. Vi har altså nok en gang en hel familie av løsninger. Dersom vi krever at bruker initialkravet, får vi

$$x_0 = x(0) = Ce^{a\cdot 0} = C$$

slik at løsningen er

$$x(t) = x_0e^{at}.$$

$\boxed{\text{5-8}}$ La oss begynne med 8. Dersom t måles i 20-minutters inkrementer, går det for eksempel 20 minutter mellom $t = 0$ og $t = 1$. På denne tiden skal antall bakterier dobles, så da må vel $a = \ln 2$, slik at

$$x(t) = x_0 e^{at} = x_0 e^{(\ln 2)t} = x_0 2^t.$$

Å øke t med en korresponderer nå til å gange antall bakterier med to.

Dette er omtrent slik du må tenke. La oss nå begynne med oppgave 7. (SI-enheter har en viss forrang over andre enheter; en gang krasjet visst et ubemannet månelandingsfartøy fordi en gjeng med amerikanere hadde skrevet noe software der det var brukt fot og pund i stedet for meter og kilogram.) Dersom t måles i sekunder, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått 1200 sekunder. Vi kan egentlig gjøre det enkelt og si at det skal dobles fra $t = 0$ til $t = 1200$:

$$2 = e^{1200a}$$

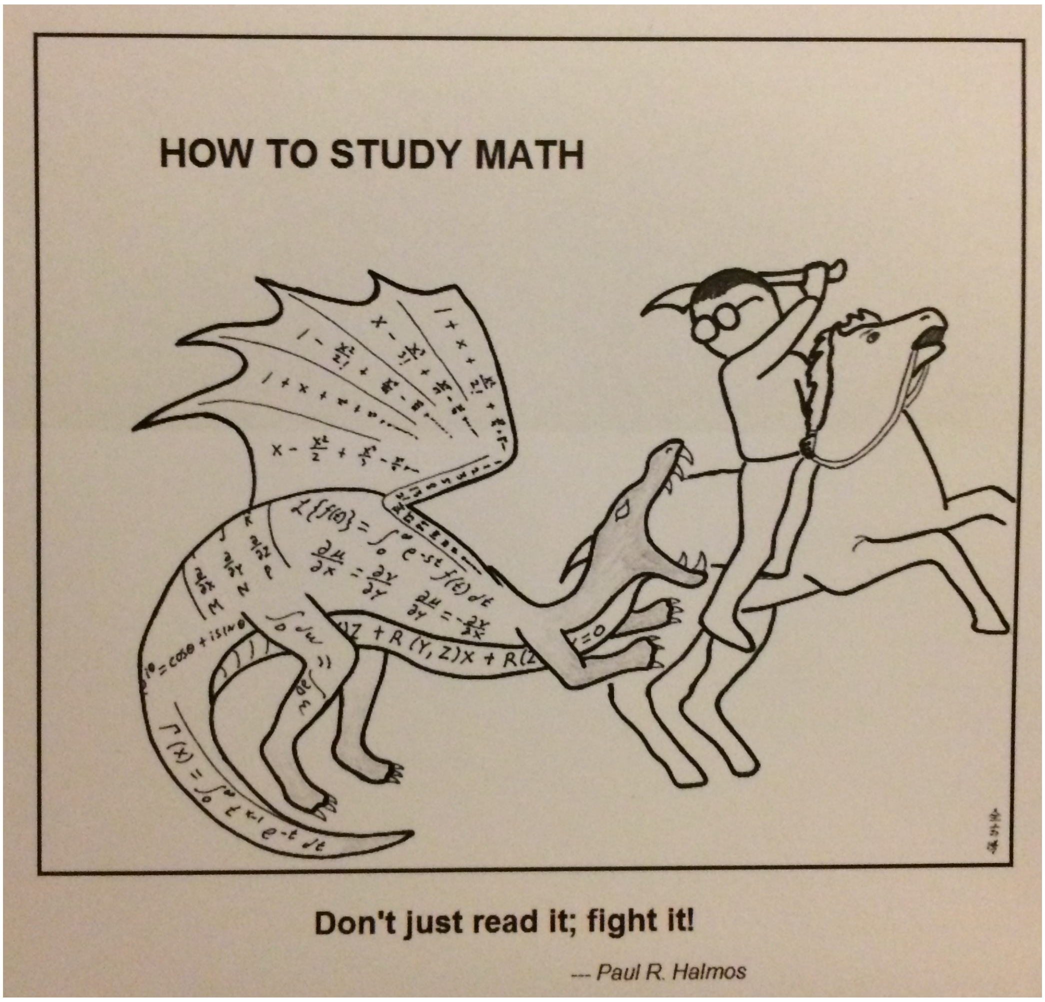
som gir $a = (\ln 2)/1200$. Samme med de andre. Dersom t måles i minutter, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått tjue minutter, så vi får

$$2 = e^{20a}$$

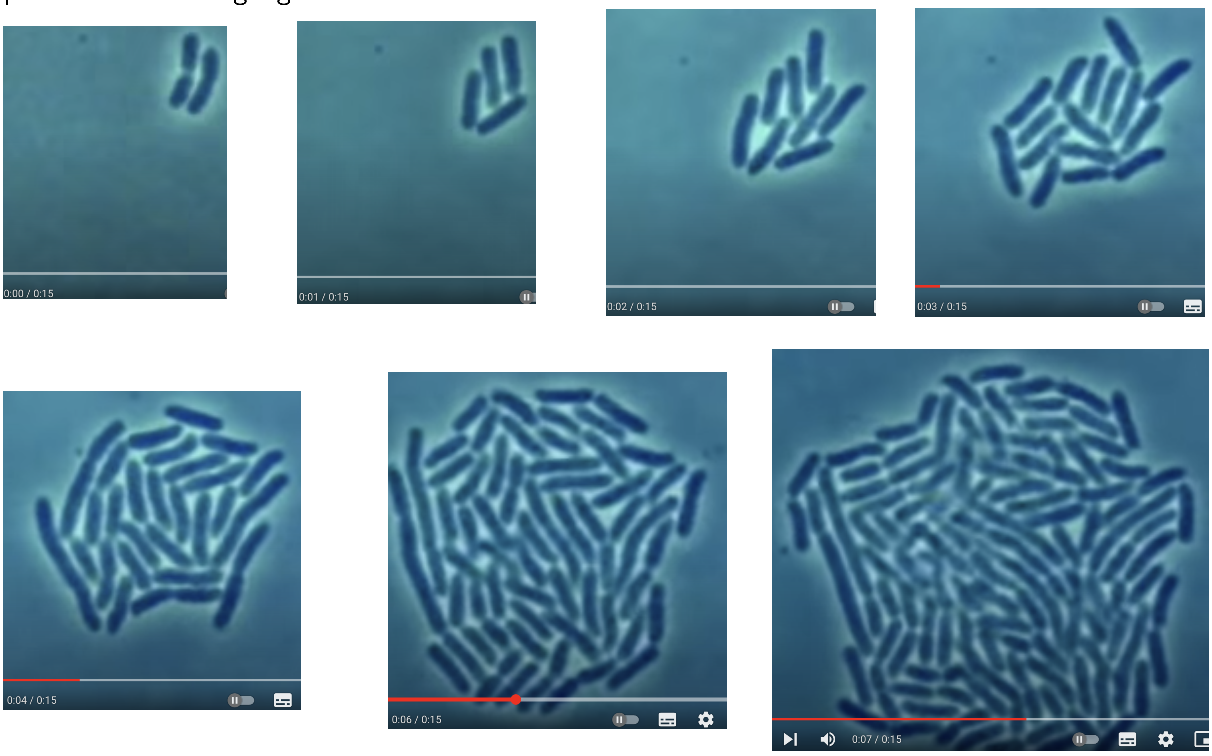
som gir $a = (\ln 2)/20$. Dersom t måles i timer, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått en tredjedels time, så vi får

$$2 = e^{a/3}$$

som gir $a = 3\ln 2 = \ln 8$.



5678 Ett sekund i denne videoen er antagelg omtrent 20 minutter i virkeligheten. Her er skjerdumper av omtrent en gang i sekundet. Tell selv:



9 Vi vet at løsningen er

$$x(t) = x_0 2^{-t/5700}.$$

Nå er det irrelevant hva x_0 er, så lenge vi finner det tidspunktet der $x(t)$ er nede i en tiendedel av x_0, som gir likningen

$$\frac{1}{10} = 2^{-t/5700}$$

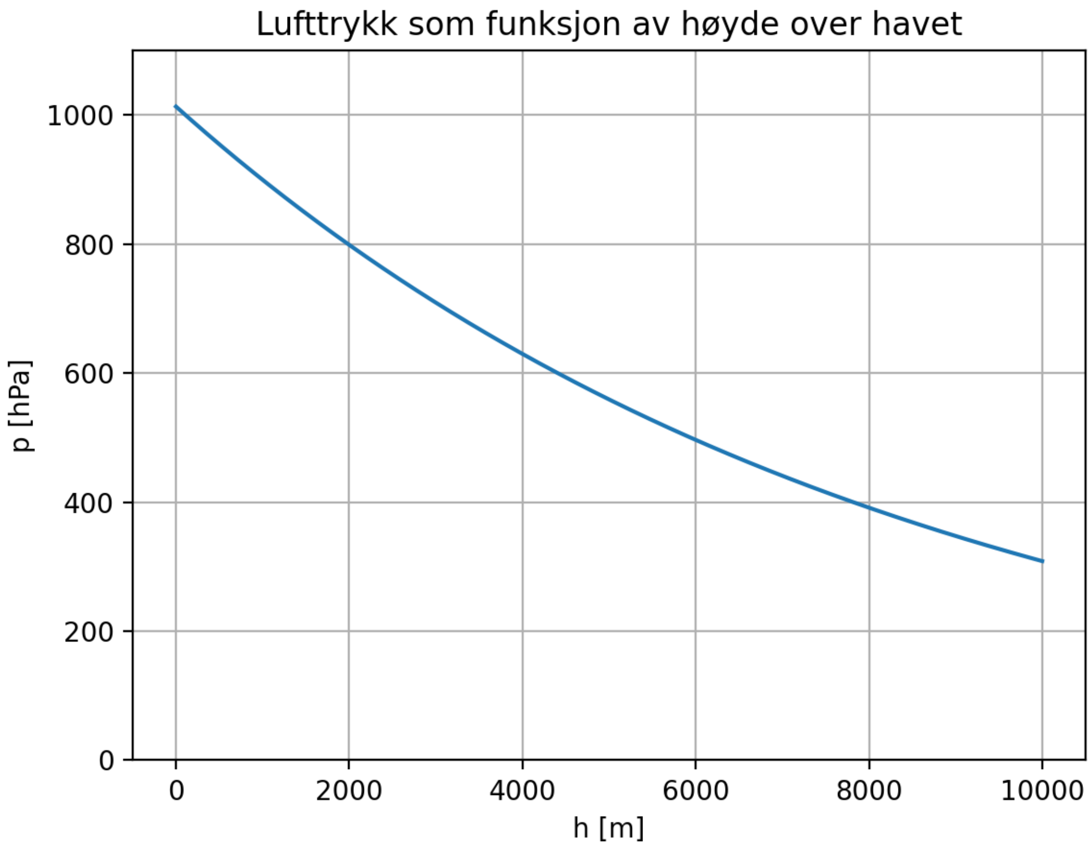
som gir

$$\text{KATTENS DØD} = t = 5700\frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

Katten døde altså for om lag 19000 år siden. Dette er omtrentlig, for C-14-konsentrasjonen var ikke den samme da som nå, og forskere krangler ennå om hva det nøyaktige C-14-innholdet i atmosfæren har vært de siste 50000 årene. C-14 dannes når nøytroner fra kosmisk stråling kræsjer med N-14-isotoper høyt oppe i troposfæren, men et par atombombesprengninger (som produserer mye C-14) og massevis av CO_2 fra fossilt brennstoff (som produserer mye C-12) har gjort alt litt komplisert.

10 Av og til gir selv enkle modeller korrekt prediksjon ved eksperiment. Ecolimodellen gir sånn høvelig riktig vekst i begynnelsen (den bryter sammen når det begynner å bli trangt), og kondensatormodellen (oppgave 18 lenger ned) er også ganske bra.

Modellen i denne opppgaven er fullstendig håpløs. Studass Even har laga et plotteskript til dere, som ligger her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/even/`
og det produserer følgende plot:



I denne modellen må man gjøre antagelser på massen til et typisk luftmolekyl. Et "luftmolekyl" finnes jo ikke, luft består av forskjellige konsentrasjoner av forskjellige gasser og disse konsentrasjonene endres med høyden over havet. Tyngdeakselerasjonen endres med høyden over havet, og det gjør selvfølgelig temperaturen også. Med andre ord kan vi ikke forvente at denne modellen treffer særlig bra, se her:
`https://snl.no/lufttrykk`
og her:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_40.html`

$\boxed{11}$ Denne er skikkelig artig. Hvis vi tenker at vi får lov til å derivere e^{it} slik som andre eksponensialfunksjoner, er

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it},$$

og vi ser at dette er en løsning av $\dot{x} = ix$. Men

$$\frac{d}{dt}\cos t + i\sin t = -\sin t + i\cos t = i\left(\cos t + i\sin t\right),$$

så denne passer visst også i likningen. Nå går det an å vise at dette problemet har entydig løsning dersom du spesifiserer initialkrav (her må du slå opp i en mer avansert bok, for eksempel Schaeffer og Cain), så da må det vel kanskje være slik at

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

(Her har jeg brukt initialkravet $x(0) = 1$.)

12 Vi beregner

$$\dot{x} = cae^{at},$$

og

$$ax + b = a\left(ce^{at} - \frac{b}{a}\right) + b = cae^{at}.$$

Høyre og venstre side er like, så da må vel dette være en løsning. Det går også her an å vise at problemet kun har én løsning om du spesifiserer initialkrav, se en eller annen ordentlig mattebok.

14 Vi har fått at $T_0 = 6$, $T_k = 20$ og $T(2) = 13$, dersom t måles i timer. Dette gir

$$13 = T(2) = 20 + (6 - 20)e^{-2\alpha},$$

slik at $\alpha = \frac{1}{2}\ln 2$.

15 Vi har fått at $T_0 = 15$ og $T(1) = 12$. Dette gir

$$12 = T(1) = T_K + (15 - T_K)e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = T_K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{15}{\sqrt{2}},$$

slik at $T_k = \frac{12 - \frac{15}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{\sqrt{2} - 1}$.

Mer realistisk 15 Her må man nesten bruke regresjon. Dette lærer du i TMA4245 til våren: `https://tma4245.math.ntnu.no/enkel-lineær-regresjon/`

17 Her er det viktig å skjønne at dette er akkurat den samme likningen som Newtons avkjølingslov, det er bare det at den er skrevet ned litt annerledes. Løsningen er fremdeles på formen $ce^{at} - b/a$, men nå heter den ukjente $i(t)$ (i er vanlig bokstav for strøm, og derfor bruker de j for den imaginære enheten i elektroteknikk), og $Ri(t)$ er på motsatt side av likningen i forhold til lenger opp. Løsningen er

$$i(t) = \frac{9}{R} + ce^{-Rt/L}$$

og bruker vi initialkravet, får vi

$$0 = i(0) = \frac{9}{R} + c$$

slik at løsningen blir

$$i(t) = \frac{9}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right).$$

18 Dette blir identisk med oppgaven over. Løsningen er

$$v(t) = 9 + ce^{-t/RC}$$

og bruker vi initialkravet, får vi

$$0 = v(0) = 9 + c$$

slik at løsningen blir

$$v(t) = 9\left(1 - e^{-Rt/L}\right).$$

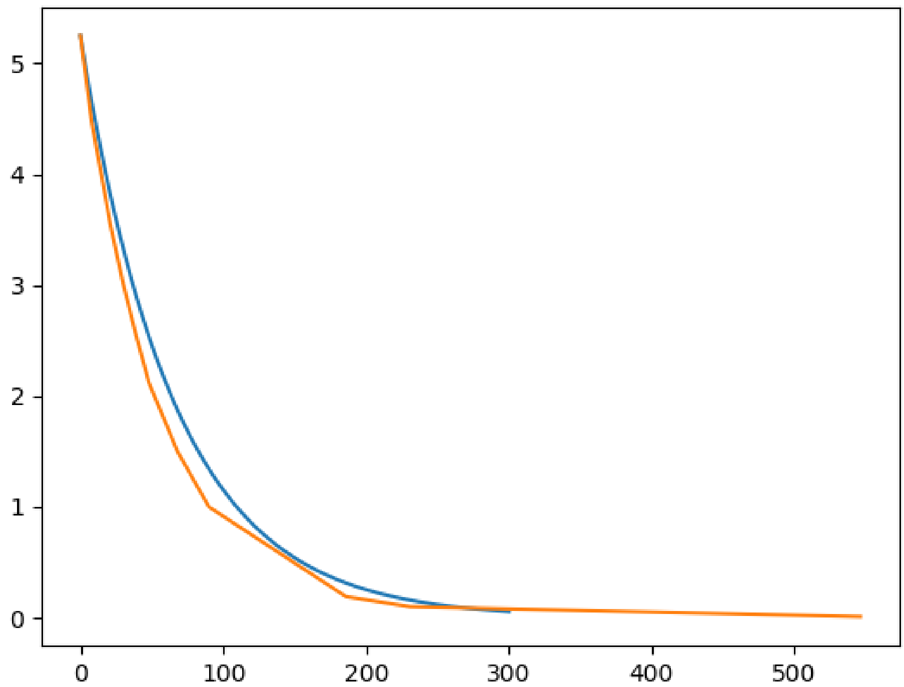
$\boxed{19}$ Takk til Håvard Lien Juvik og hans kamerat Kjell Senås som gjorde dette eksperimentet i forelesning. Det var en kondensator på 66 mikrofarad [21] og en motstand på 2.2 megaohm. En kondensator er en ting som samler opp elektrisk potensiell energi på noen metallplater. I forelesning ble den først ladet opp med et batteri, og så målte gutta krutt utladningsprosessen. (De filma multimeteret med en telefon og henta ut spenninger og tidspunkt etterpå.) Dette gir difflikningen

$$RC\dot{v} + v = 0$$

med initialkrav sånn ca $v(0) = 5.3$ volt eller noe i den dur. Løsningen er

$$v(t) = v_0 e^{-t/3}$$

og her er plot av løsning (blå) og empiriske målinger (oransje). Denne modellen ser ut til å passe ganske bra med empiri. Det er fordi vi vet sånn cirka hvordan motstand, kondensator og strømledning funker.



[21]Faktisk var det tre kondensatorer på 22 mikrofarad satt i parallell. Dette var de største kondensatorene Lars fant på kontoret sitt rett før forelesningen.

$\boxed{21}$ Løsningen til likningen er

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$1 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$0 = \dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir $c_2 = 0$. Løsningen blir

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

$\boxed{22}$ Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$0 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$1 = \dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Løsningen blir

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

$\boxed{23}$ Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$x_0 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$v_0 = \dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir

$$c_2 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Løsningen blir

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

$\boxed{24}$ Her er litt godt gjemt bonusinformasjon for de ihuga. Noen av dere begynner sikkert å lure på hva som skjer dersom vi putter inn noe mer komplisert enn en konstant på høyresiden av likningen. Dersom du har en likning

$$\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$$

der f er en gitt funksjon, er løsningen alltid

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der $x_h(t) = Ce^{\lambda t}$ (subindeks-h står for "homogen") og x_p er noe vi kaller "partikulærløsningen".

Det går an å utlede en formel for x_p gitt x_h,[22] men den er knotete i bruk; det enkleste er som regel å gjette på x_p. Dette går fint med litt trening, og i gamle dager tvang vi studenter til å pugge en svær tabell. Jeg har litt mer troen på å lære seg de fire viktigste høyresidene som faktisk dukker opp i anvendelser. De er

Naturlig respons: Systemets respons på $f(t) = 0$

Frekvensrespons: Systemets respons på $f(t) = e^{i\omega t}$

Sprangrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ d & t \geq a \end{cases}$

Impulsrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$

Den første kjenner du allerede; det er bare x_h.

Frekvensresponsen er ganske enkel. Av samme grunn som at vi gjetter på $x_h(t) = Ce^{\lambda t}$, gjetter vi på at $x_p(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$, (dette vil bli klart i lineæralgebradelen som kommer om litt) og resten er temmelig likt. Vi setter gjetningen inn i likningen, og får

$$H(\omega)i\omega e^{i\omega t} + cH(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

som gir

$$H(\omega) = \frac{1}{i\omega + c}$$

og

$$x_p(t) = \frac{1}{i\omega + c}e^{i\omega t}$$

slik at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ce^{\lambda t} + \frac{1}{i\omega + c}e^{i\omega t}.$$

Funksjonen H kalles **transferfunksjonen** på MTTK og **systemfunksjonen** på MTELSYS. Jeg ville nok slått et slag for at x er det som burde kalles frekvensresponsen, men mange ingeniører vil nok bruke ordet "frekvensresponsen" om H. I neste semester skal vi se på en smoothere teknikk for å finne H, nemlig laplacetransform. I ingeniørfag er det vanlig i å bruke vinkelfrekvens

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

[22] https://en.wikipedia.org/wiki/Variation_of_parameters

der T er perioden til signalet, og frekvensresponsen gir informasjon om hvordan det fysiske systemet responderer på forskjellige påtrykte frekvenser.

Den neste i rekken, sprangresponsen, er også lett å beregne. Først løser vi

$$\dot{x} + cx = d \qquad x(0) = 0$$

som gir

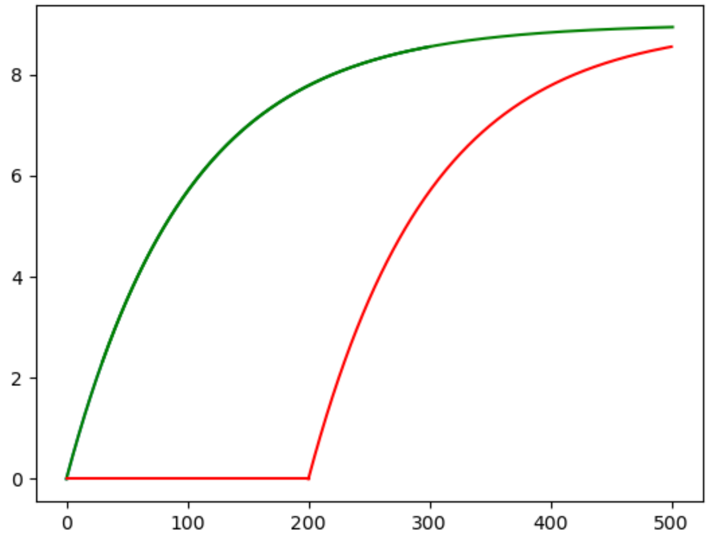
$$x(t) = \frac{d}{c}\left(1 - e^{-ct}\right),$$

og så flytter vi denne løsningen a knepp bort langs tidsaksen, og setter alt før $t = a$ til null:

$$\text{sprangrespons} = \begin{cases} 0 & t < a \\ x(t-a) & t \geq a \end{cases}$$

Dette kan vi gjøre fordi vi har å gjøre med et LTI-system, og det responderer identisk på identiske påtrykk påtrykt på forskjellige tidspunkt.

Hvis du lader opp den samme kondensatoren idag og imorgen, setter jeg penger på at oppladningen skjer omtrent likt i dag og imorgen. Det å koble et batteri på en krets, er en typisk sprangrespons. Her er et plot av to teoretiske oppladninger av en kondensator i en rc-krets med det samme nivoltsbatteriet. Det eneste som skiller dem, er når oppladningen starter.



Den siste, impulsresponsen, er litt snodig. Vi må vente litt med den.

27 Jeg har aldri jobbet som bilmekaniker, men jeg setter nok litt penger på at de er ute etter kritisk demping eller deromkring. Hvis du har underkritisk demping, vil bilen sprette bortover etter hver eneste lille hump, og har du overkritisk demping, vil bilen få en periode med slagside etter hver eneste sving.

28 Det er visst ikke spoler i elsyskofferten, men jeg har et par på kontoret. Send en epost om du vil prøve. Eller gå ned på OV, der ligger det antagelig noen spoler og slenger.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{1}$ Vis at

$$x(t) = x_0 e^{-at}$$

er den eneste kontinuerlig deriverbare løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = x_0.$$

Løsning: La oss anta at det finnes en annen løsning $h(t)$. Dersom vi deriverer produktet $e^{at}h(t)$, får vi

$$\frac{d}{dt}e^{at}h(t) = e^{at}\dot{h}(t) + ae^{-at}h(t) = x_0 e^{at}\left(\dot{h}(t) + ah(t)\right) = 0$$

så med andre ord må

$$e^{at}h(t) = c$$

slik at

$$h(t) = ce^{-at}$$

og bruker vi initialkravet $h(0) = x_0$, ser vi til og med at

$$h(t) = x_0 e^{-at} = x(t).$$

Med andre ord har problemet

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = x_0$$

kun en løsning.