TMA4101/4106/4111/4121

1 - 13 - EKSAMENSTRENING

1 - TALL

$\boxed{1}$ Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk m/n der m og n er hele tall.

$\boxed{2}$ Forklar hva et komplekst tall er, tegn wesselplanet, utled regneregelen

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

og vis at z og iz står vinkelrett på hverandre i det komplekse planet.

2 - FUNKSJONER

$\boxed{1}$ Skriv opp definisjonen på den deriverte og bruk den til å vise at x^n har derivert nx^{n-1} dersom n er et naturlig tall.

$\boxed{2}$ Skriv opp definisjonen på invers funksjon og vis at

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dersom f^{-1} eksisterer, f er deriverbar og $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Tegn en figur som illustrerer denne derivasjonsregelen, og vis at

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

3 - LIKNINGER

$\boxed{1}$ Gjør rede for Newtons metode, og forklar hvorfor iterasjonen blir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$\boxed{2}$ Forklar hva fikspunktiterasjonen er, og bruk sekantsetningen til å vise at for fikspunktiterasjonen finnes det, dersom g er deriverbar, en s mellom x_n og $r = g(r)$ slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

4 - DIFFERENSIALLIKNINGER

$\boxed{1}$ Newtons avkjølingsproblem er gitt ved

$$\dot{T}(t) + \alpha\,(T(t) - T_K) = 0 \qquad T(0) = T_0,$$

der T er temperaturen i en ting som avkjøles eller varmes opp av omgivelsene, T_K er temperaturen til omgivelsene, og T_0 er temperaturen i tingen ved eksperimentets start. Vis at løsningen er

$$T(t) = T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t}.$$

$\boxed{2}$ Løsningene til den homogene likningen

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

utgjør for alle kombinasjoner av b og c et todimensjonalt vektorrom, men løsningsformelen ser litt forskjellig ut alt etter verdien på $\sqrt{b^2 - 4c}$. Gjør rede for de tre tilfellene.

5 - DIFFERENSIALLIKNINGSSYSTEMER

$\boxed{1}$ Forklar hvorden Eulers eksplisitte metode fungerer, og skriv opp metodens rekursjonslikning for lotkavolterraproblemet.

$\boxed{2}$ Utled pendellikningen

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

der θ er vinkelutslaget, l er pendelens lengde og g er tyngdeakselerasjonen. Forklar hva et førsteintegral er, og utled at

$$m\frac{1}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = C$$

for pendellikningen.

6 - LIKNINGSSYSTEMER

$\boxed{1}$ Skriv opp formelen for 3×3-determinant. Forklar hva den regner ut, og hvordan du kan bruke svaret til å avgjøre hvorvidt et lineært likningssystem med tre likninger og tre ukjente har entydig løsning.

$\boxed{2}$ Skriv opp definisjonen på lineær uavhengighet og vis at dersom

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, så er $c_1, c_2, \cdots, c_n$ entydig bestemt.