1 - 13 - POTENSREKKER - LF

$\boxed{1}$ Rekkeutviklingen til $\arctan$-funksjonen er ganske lett å huske, så jeg husket den, og beregnet

$$\arctan\left(\frac{15}{19}\right) \approx \frac{15}{19} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{15}{19}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{15}{19}\right)^5 = 0.69$$

som gir en vinkel på omtrent

$$\frac{0.69}{2\pi}\cdot 360 = 39.4$$

grader. Dette er helt feil vinkel, så antagelig husker jeg feile kateter. Tror kanskje det egentlig var 8 og 15, som gir

$$\arctan\left(\frac{8}{15}\right) \approx \frac{8}{15} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^5 = 0.49$$

og en vinkel på omtrent

$$\frac{0.49}{2\pi}\cdot 360 = 28.2,$$

for jeg husker at jeg sa til blikkenslageren at takvinkelen var omtrent 28 grader.

$\boxed{2}$ La $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = x - s$ slik at $v'(s) = -1$. Vi beregner

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \int_0^x e^s \, ds \\
&= 1 - \int_0^x (-1)\cdot e^s \, ds \\
&= 1 - (x-s)e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \int_0^x (x-s)e^s \, ds \\
&= 1 + x + \int_0^x (x-s)e^s \, ds
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Vi kjører en gang til. La $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{2}(x-s)^2$ slik at $v'(s) = -(x-s)$, og

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \int_0^x (x-s)e^s \, ds \\
&= 1 + x - \int_0^x -(x-s)e^s \, ds \\
&= 1 + x - \frac{1}{2}(x-s)^2 e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^s \, ds.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Nå håper jeg du husker induksjonsbevis fra gymnaset. Hvis ikke, kan du lese kap. 1.10 i Arnes bok. Vi skal sjekke formelen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds.$$

og vi har allerede sjekket den for $n = 0$ (analysens fundamentalteorem), $n = 1$ og $n = 2$, så vi kan gå rett på induksjonssteget. Anta at likningen holder, og la $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{(n+1)!}(x-s)^{n+1}$ slik at $v'(s) = -\frac{1}{n!}(x-s)^n$. Vi beregner

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{n!}\int_0^x -(x-s)^n e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-s)^{n+1} e^s \, ds \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-s)^{n+1} e^s \, ds.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Du finner pythonkode her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/taylor/`

$\boxed{5}$ Her er det lurt å se på

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds$$

som forteller oss noe om hvor mye taylorpolynomet bommer på den faktiske verdien til eksponensialfunksjonen. Alle barn i barnehagen skjønner at

$$\left|\int f\right| \le \int |f|$$

slik at

$$\begin{aligned}
\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| &= \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds\right| \\
&\le \frac{1}{n!}\int_0^x |(x-s)^n e^s| \, ds \\
&\le \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-s)^n \, ds = \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}
\end{aligned}$$

og setter vi $x = 1$, får vi

$$\left|e - \left(1 + x + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds\right| \le \frac{e}{(n+1)!}$$

Nå vil onde tunger kanskje innvende at hvis vi ikke vet hva e er, hjelper ikke feilestimatet oss så mye. Men fakultetene stiger helt ekstremt fort. La oss si at vi visste $e < 3$. I så fall vet vi at

$$\left|e - \left(1 + x + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| \le \frac{3}{(n+1)!}$$

Jeg skrev opp de desimalene jeg huska i farten, og det ser ut til å være rundt tjue stk. Hvis du går på wikipedia og sjekker fakulteter, vil du se at $25! \approx 10^{25}$, så noen og tjue ledd burde holde i massevis. Hvis du faktisk ønsker å sjekke, må du finne ut hvordan python regner med flere desimaler enn seksten. (Google "numpy extended precision".)

$\boxed{9}$ Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r, sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r, og vi ser nå hvorfor det er lurt å ha enn viss peiling på hvorvidt $|g'| < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjør.

$\boxed{11}$ Vi bruker taylors teorem (husk at $f(r) = 0$)

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2$$

for s mellom x_n og r. Newtons metode er

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Trekker vi disse likningene fra hverandre, får vi

$$0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2.$$

Her står det at

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

som sier at Newtons metode i mange situasjoner har kvadratisk konvergens. Det går an å sette opp presise kriterier for når dette skjer, men det skal vi ikke gjøre.

$\boxed{12}$ Dette utrrykket er relativt greit å derivere mange ganger:

$$\frac{d}{dx^n}\frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^n}$$

og hvis vi evaluerer i $x = 0$ og setter inn i taylorformelen med $a = 0$, får vi

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x_n.$$

I retrospekt kom dette kanskje ikke som noe sjokk.

$\boxed{13}$ Her er det enklest å bruke forholdstesten. Vi beregner

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

som gir konvergens for $|x| < 1$ og divergens for $|x| > 1$. For $x = 1$ får vi den harmoniske rekken, som er divergent, og for $x = -1$ får vi den alternende harmoniske rekken, som konvergerer. Konvergensområdet er altså $[-1, 1)$.

$\boxed{14}$ Denne kan du gjøre på akkurat samme måte, men konvergensområdet blir $[-1, 1]$.

$\boxed{15\text{-}17}$ Samme her, bruk forholdstesten på akkurat samme måte, og sjekk endepunktene for konvergensområdet manuelt om det trengs.

$\boxed{18}$ Denne har vi allerede regnet ut geometrisk, men det taylorrekken gjør slikt enklere å huske:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{\theta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n+1)!} = 1$$

$\boxed{19}$ Samme her:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\right) = \lim_{\theta\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n-1}}{(2n)!} = 0$$

$\boxed{20}$ Og her:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}-1\right)\left(x-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}\right)\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6/2+\cdots}{x^3/3!-x^5/5!+\cdots} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6/2+\cdots}{x^3/3!-x^5/5!+\cdots}\cdot\frac{1/x^3}{1/x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^3/2+\cdots}{1/3!-x^2/5!+\cdots} = 3!
\end{aligned}$$

$\boxed{21}$ Vi setter $-x^2/2$ inn for x i rekken for eksponensialfunksjonen:

$$e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2/2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}$$

Hvis du leser kapittel 6.7 i Arnes bok, vil du se at det går greit å integere denne rekken fra 0 til 1, slik at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\int_0^1 x^{2n}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

Du finner pythonkode her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/kvadratur/normalfordeling/maclaurin.py`

$\boxed{22}$ Lett! Summen til en alternerende rekke approksimeres av partialsummene med en feil som alltid er mindre enn det første utelatte ledd i absoluttverdi. det første leddet er $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, og det andre er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)^1}{2^1 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = -\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$$

mens det tredje er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)^2}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \leq 10^{-2}$$

Vi trenger altså bare to ledd for å få en approksimasjon som er mindre 10^{-2} fra korrekte verd.

$\boxed{23}$ Dette er eksponensialfunksjonen evaluert i $x = 1$.

$\boxed{24}$ Dette er eksponensialfunksjonen evaluert i $x = i$.

$\boxed{25}$ Cosinusfunksjonen evaluert i $x = 1$.

$\boxed{26}$ Arcustangensfunksjonen evaluert i $x = 1$.

$\boxed{27}$ Hehehe husker ikke helt hva jeg tenkte her, men denne hersker det faktisk litt usikkerhet om i fagfeltet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s_constant`

$\boxed{28}$ Du gjettet helt riktig. Hvordan vi beregner e^A der A er en matrise, skal vi se på til våren.

$\boxed{29}$ Hvis du taylorutvikler eksponensialfunksjonen i nevneren i

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

med hensyn på λ, vil du se at Lord Rayleigh kun har fått med seg det første leddet i utviklingen.

$\boxed{30}$ Sjekk fotnoten helt til slutt her:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_45.html` Vi må fremdeles beregne at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

men det kommer til våren i TMA4106.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Vi husker jo godt sinusfunksjonens taylorrekke om $a = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

som gir

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Vi kan få lov til å integrere denne ledd for ledd

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}\Bigg|_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \cdots
\end{aligned}
$$

Den etterspurte tilnærmingen blir da

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18},$$

og siden det neste leddet i rekken er $1/600$ må feilen være mindre enn dette.

$\boxed{2}$ Vi bruker forholdstesten, og regner ut at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(-1)^n x^{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = x^2 < 1$$

dersom $|x| < 1$. Dette impliserer at rekken konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$ Vi sjekker endepunktene. For $x = 1$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

og for $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$$

som begge er konvergente rekker. Konvergensområdet er altså $|x| \leq 1$. Det enkleste så, er å starte med geometrisk rekke:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n$$

substituere $x = -s^2$:

$$\frac{1}{1+s^2} = \sum_{n=0}(-1)^n s^{2n}$$

og så integrere hele greia fra 0 til x, og få

$$\arctan x = \sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\boxed{3}$ Alle barn husker uttrykket for geometrisk rekke siden de har pugget det på skolen. Vi kan integrere denne leddvis:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Longrightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Den siste rekken blir en konvergent alternerende rekke når $x = 1$, og vi ser at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Merk at rekkene for $\frac{1}{1-x}$ og $\frac{1}{1+x}$ ikke konvergerer for $x = 1$.

$\boxed{4}$ Hvis vi deriverer den geometriske reken, får vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$

og dersom denne evalueres i $x = \frac{1}{3}$, får vi

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}.$$