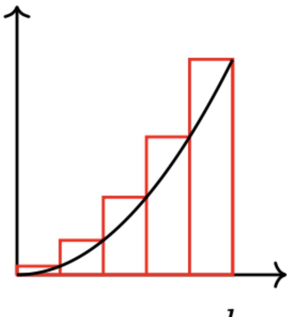
TMA4101/4106/4111/4121

1 - 12 - REKKER - LF



$\boxed{1}$ La $f(x) = x^2$. Gitterpunktene blir

$$x_k = hk = \frac{bk}{n}$$

der indeksen k løper fra 0 til n. Riemannsummen blir

$$\sum_{k=1}^{n} hf(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} f\left(\frac{bk}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

$\boxed{2}$ I tredje klasse på barneskolen viste vår klasseforstander Jodis oss at

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots = 50 \cdot 101.$$

Vi ble målløse av beundring, men når jeg i voksen alder skulle bruke det samme trikset, innså jeg at det man må tenke seg litt mer om, for hvis du summerer et odde antall stigende heltall, ser det jo bittelitt annerledes ut. Formelen blir den samme, men om man som meg har ikke spesielt høy IQ, er det ikke helt innlysende. Derfor er det penest å gange ut

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = -n + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

og løse for

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\boxed{3}$ Vi gjentar suksessen, ganger ut

$$n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

og løser for

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3 + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n}{3} = \frac{n^3 + 3\frac{n^2+n}{2} - n}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Bruker vi oppgave og stoler på at riemannsummen finner frem til integralet når $n \to \infty$, får vi

$$\begin{aligned}\int_0^b x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\cdot\frac{1/n^3}{1/n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{1}\frac{2+3/n+1/n^2}{6} = \frac{b^3}{3}.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi får

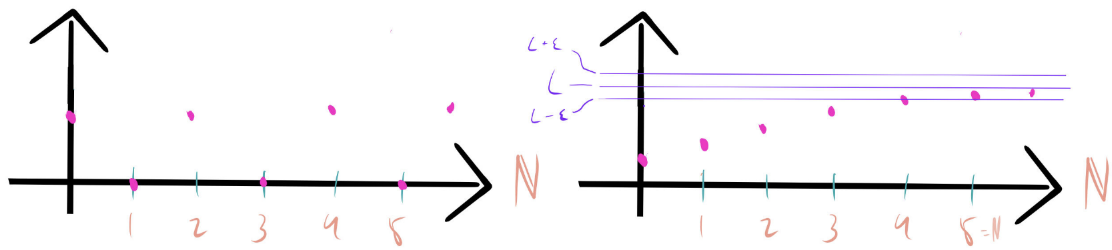
$$2L = 2+4+8+16+\cdots = L-1$$

som gir $L=-1$. Dette er åpenbart absurd. Vi har altså ikke funnet noen strategi vi kan stole helt på om vi ønsker å finne ut hva en rekke summerer til.

$\boxed{6}$ Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er **konvergent** dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

I figuren under er et maleri av partialsummene til den geometriske rekken evaulert i $x=-1$, sammenliknet med et maleri av en konvergent følge som konvergerer mot en verdi L. Jeg har tegnet inn en ϵ for illustrasjon. Husk at om det skal være konvergens skal denne kunne velges fritt, altså så liten man vil, og så må du alltid kunne finne N slik at følgen holder seg nærmere L enn ϵ for alle $n > N$.



Selv om følgen til venstre i figuren ikke konvergerer, er den **begrenset**; det finnes et tall M slik at leddene i følgen alltid er mindre enn M i absoluttverdi. Her er en faktoide. En begrenset følge har alltid en **konvergent delfølge**. Dette betyr at du får en konvergent følge om du hiver ut de leddene som ødelegger konvergensen for deg, litt som når man cherrypicker data for å få en bestemt konklusjon.[1] I dette tilfellet må du hive ut annethvert ledd i følgen.

$\boxed{789}$ Disse oppgaven var så like, så la oss utlede en formel.

$$\sum_{k=n}^{\infty} x^k = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = k^n\left(1+x+x^2+\cdots\right) = k^n\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x}$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cherry_picking`

Denne formelen gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1-1/(1+i)} = \frac{1+i}{1+i-1} = 1-i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1+i}{1-1/(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{i} = 2$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^{10}}{1-1/(1+i)} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{10}}{i} = 32$$

$\boxed{10}$ Ballen faller først ned tre meter. På første sprett opp og ned igjen blir det $2 \cdot 3 \cdot 3/4$ meter, og på andre sprett $2 \cdot 3 \cdot (3/4)^2$ meter og så videre, slik at total tilbakelagt distanse i meter blir

$$3 + 2 \cdot 3 \cdot (3/4) + 2 \cdot 3 \cdot (3/4)^2 + \cdots = 3 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3 + 6 \cdot \frac{3/4}{1-3/4} = 21$$

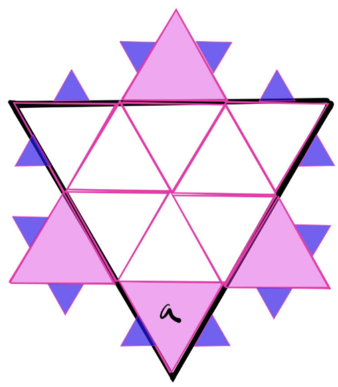
$\boxed{11}$ Dette blir en geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor $\sqrt{2}$, som er en genial multiplikasjonsfaktor. En A4-side er nøyaktig halvparten så stort areal som en A3-side og dobbelt så stort areal som en A5-side, og du kan få en A5-side ved å kappe en A4-side i to parallelt med de korte siden. Dette pene systemet er kun mulig dersom forholdet mellom sidekantene er nettopp $\sqrt{2}$. Hvis ikke dette er bra motivasjon for å lære geometriske rekker så vet ikke jeg.

$\boxed{12}$ La oss si at sidekanten i den opprinnelige trekanten er x, slik at omkretsen blir $3x$. Hvis du studerer figuren nøye og husker alt du har lært om likesidete trekanter på barneskolen, vil du se at omkretsen til den sekstaggete stjernen som er neste i rekken er $3x \cdot (4/3)$ siden man legger til en tredjedel av lengde på hver sidekant. Omkretsen til den neste greia blir $3x \cdot (4/3)^2$, og hvis vi lar $n \to \infty$, får vi

$$3x \lim_{n\to\infty} \cdot (4/3)^n = \infty.$$

Arealet er litt mer pjask, se figuren til høyre. Jeg måtte har tre forsøk før jeg fikk det riktig. Utregningen blir enklest om man tar utgangspunkt i den lille rosa trekanten med areal a. Den opprinnelige trekanten består av ni slike, og har areal $9a = \sqrt{3}x^2/4$, slik at $a = \sqrt{3}x^2/36$. I neste lag blir det fire ganger så mange trekanter, men hver av dem har en niendedel av arealet til trekantene i laget før, og dette systemet fortsetter. Det totale arealet blir

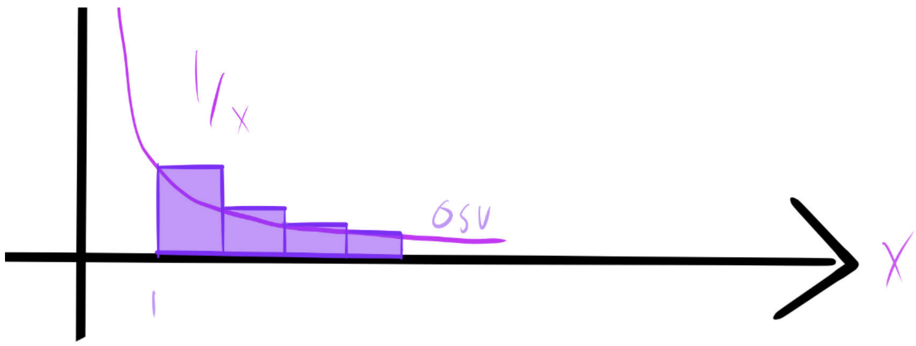
$$\begin{aligned} A =& 9a + 3a + \frac{12a}{9} + \frac{48a}{9^2} + \frac{196a}{9^3} + \cdots \\ =& 9a + 3a\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots\right) \\ =& 9a + 3a \cdot \frac{1}{1-4/9} \\ =& 3a\left(3 + \frac{9}{5}\right) \\ =& 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}x^2. \end{aligned}$$



$\boxed{\text{H}}$ Jeg synes det peneste er å gjøre slik:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots \\ &\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots \\ &= 1+1+1+\cdots=\infty\end{aligned}$$

Du kan også se det ved å betrakte følgende denne figuren



og sammenlikne med

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\infty.$$

Dette kalles **integraltesten**, se 6.2 i Arnes bok.

$\boxed{13}$ Her kan vi enten observere at siden $\sqrt{n}\le n$ når $n\ge 1$, må

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{n}$$

og følgelig divergerer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Vi kan også bruke integraltesten og huske at

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\infty$$

som impliserer divergens.

$\boxed{14}$ Denne kan løses på samme måte som 15, men konklusjonen blir motsatt.

$\boxed{15}$ Sammenlikning med $\sum\frac{2}{n^2}$ gir konvergens på denne. Det går imidlertid også an å observere at

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

slik at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots=1.$$

Dette kalles en **teleskoperende rekke**.

$\boxed{16}$ Denne tar vi enkelt med å sammenlikne med geometrisk rekke, siden

$$\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Det er i tillegg mulig se at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} = \log\left(\frac{3}{2}\right),$$

men det må vi vente med til neste uke.

$\boxed{17}$ Siden $\sqrt{n} \leq n$ når $n \geq 1$, er også

$$2n = n + n \geq n + \sqrt{n}$$

som gir at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergerer.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Forholdstesten gir konvergens for $|x| \leq \frac{1}{3}$, siden

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-3x)^{n+1}/(n+1)|}{|(-3x)^n/n|} = |3x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |3x|.$$

Dersom $x = \frac{1}{3}$ får vi den alternerende rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som er konvergent. Dersom $x = -\frac{1}{3}$ får vi rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er divergent.

$\boxed{2}$ La oss begynne med å delbrøksoppspalte innmaten i rekken. Vi søker A og B slik at

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2}$$

Dersom vi ganger opp med $n(n-2)$ på begge sider, får vi likningen

$$1 = A(n-2) + Bn.$$

Nå er det slik at dersom venstre og høyre side skal være like, må de være like for hver potens av n. Det gir likningene

$$0 = A + B$$

og

$$1 = -2A$$

som burde gå greit å løse, det er jo ikke nødvendig å gausseliminere en gang, og vi kan skrive

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}.$$

Vi setter nå dette inn i rekken, og ser mønsteret:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$