1 - 11 - TEKNISK INTERMEZZO

Vi har i dette studieåret vendt oss til slike ting som at

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

og

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

så lenge $|x| < 1$, og

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

for alle z og så videre. Vi har herjet ganske bra med uendelige summer, regnet ut fourierrekker og taylorrekker og satt opp riemannintegralet og sluppet oss løs. Vi har lært masse regneregler, men skjøvet foran oss spørsmålet om nøyaktig når de kan brukes. I denne økten skal vi se litt på forskjellige ting som kan gå galt om man ikke er forsiktig.

La oss se litt på den geometriske rekken

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

for å illustrere problemet. Her er et klassisk triks for å finne L. Man ganger rekken med 2, og får

$$2L = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + L$$

som gir $L = 2$. Dette er korrekt.

$\boxed{1}$ Hva skjer om du prøver samme triks på

$$L = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots \ ?$$

Her er en annen gøy en. La oss kalle summen av alle naturlige tall x, og summen av alle oddetall y. Hvis vi splitter x i oddetall og partall:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots \\ &+ 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots \\ &+ 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots) = y + 2x \end{aligned}$$

og kansellerer en x fra hver side av likningen, får vi

$$x + y = 0$$

altås at summen av alle oddetall og summen av alle naturlige tall må summere til null. Dette er åpenbart absurd. Men at

$$1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}$$

er derimot ikke absurd:
`https://en.wikipedia.org/wiki/1_%2B_2_%2B_3_%2B_4_%2B_`

Så det er ikke så godt å vite hva man skal tro på alltid.

$\boxed{2}$ Vi vet at

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

men også at

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd} = \begin{cases} \vdots \\ 1 & \text{for } -3\pi \le t < -\pi \\ 0 & \text{for } -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{for } \pi \le t < 3\pi \\ \vdots \end{cases}$$

eller

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-n\pi)$$

Klarer du å finne en feil?
(Hint: Evaluer fourierrekken i $t=\pi$.)

Eksemplet over illustrerer hvorfor det er tryggest å skrive

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

som betyr at $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$ er fourierrekken til $x(t)$, og ikke

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

som betyr at signalet og fourierrekken er identiske. Fourierrekken til x summerer som regel til $x(t)$ for stort sett alle t, men det er ofte en og annen verdi som er litt problematisk, Det finnes patologiske tilfeller der fourierrekken summerer til noe helt annet enn $x(t)$ for alle t, men disse er mest interessante for matematikere. I den infernalske klarinettaktige pipelyden over summerer fourierrekken til $1/2$ i alle bruddpunktene, men det er jo ikke dette vi opprinnelig definerte. I praksis har akkurat dette lite eller ingenting å si i anvendelser, men man skal jo helst ha sitt på det tørre.

Og hva regnes som tørt? I anvendt matematikk er det såpass vanlig at ting skrives som uendelige summer at det kan være smart å sette av litt tid til å studere slike, og det er det vi skal gjøre denne uken. Husk at en følge z er en funksjon på $\mathbb{N}$, og at leddene i følgen skrives z_n. En **rekke** er summen av leddene i en følge

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

På kortform skriver vi $\sum z$, og uttrykket

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_N$$

kalles **den n-te partialsummen** til rekken. Disse danner en følge S.

Ingen lærebok i matematikk begynner et kapittel om rekker uten Xenos paradoks, som er rundt 2500 år gammelt. Anta at en langdistanseløper skal tilbake legge en distanse. Han tilbakelegger første halvdel på tiden T. Den neste fjerdedelen tibakelegger han på tiden $T/2$. Den neste åttendedelen tilbakelegger han på tiden $T/4$. Og slik fortsetter det. Xeno trodde han hadde funnet et paradoks her, for han trodde at

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = \infty$$

siden venstresiden er en sum av uendelig mange tall. Dette er ikke riktig. Vi har jo øverst i økten vist at løperen ser ut til å tilbakelegge distansen på tiden $2T$, og dersom man skal tillegge en den uendelige summen over noen verdi, er det naturlig å sette

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = 2T.$$

Dersom Xeno hadde satte seg inn i følgende utledning, hadde han skjønt at han var på villspor. På skolen har du lært om den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Det er ikke så vanskelig å se at dette er riktig dersom $|x| < 1$. Partialsummene er

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N,$$

og hvis vi tar

$$\begin{aligned}(1-x)S_N &= (1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^N \\ &\quad - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N+1}) = 1 - x^{N+1},\end{aligned}$$

får vi

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

Dersom vi lar $N \to \infty$, ser vi nå at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \infty & |x| > 1 \\ \infty & x = 1 \\ ? & x = -1 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Denne utledningen kommer på eksamen.

Geometriske rekker har du regnet ganske mye på på gymnaset, så vi skal ikke herje så mye med det. Men noen triks kan være lurt å kjenne til, og de dukker opp her og der i anvendelser.

$\boxed{4}$ Finn summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

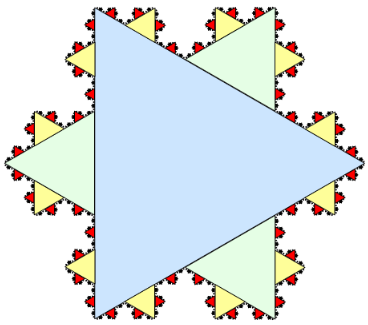
$\boxed{4}$ Hva med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}?$$

$\boxed{5}$ Enn

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}?$$

$\boxed{6}$ Figuren (takk til Jim Belk, hvem nå enn det er) viser begynnelsen på noe som heter kochsnøflaket. Dette er en fraktalkurve:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_curve`
noe som var ansett som utrolig hipt på 80-tallet. Forholdet mellom sidekantene på forskjellige trekanter i Kochsnøflakets konstruksjon er alltid potenser av $1/3$.
Vis at kochsnøflaket har uendelig omkrets men endelig areal. Hva er arealet?



$\boxed{7}$ En sprettball slippes rett ned og spretter opp $3/4$ av høyden den ble sluppet fra. Hvor langt vil ballen vil bevege seg før den blir liggende stille når den slippes fra en høyde på 3 meter?

Vi sier at en rekke **konvergerer** dersom den summerer til et tall, og **divergerer** hvis ikke. For eksempel konvergerer den geometriske rekken om $|x| < 1$ og divergerer ellers. Nå skal vi sette opp en ordentlig definisjon. En følge z sies å konvergere mot L dersom det for en hver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at

$$n \geq N \implies |z_n - L| < \epsilon.$$

Vi skriver i så fall

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L.$$

Bildet på forrige side er et klassisk eksempel på det som i dagligtale vi mener med konvergens. Brøytestikkene eller grøftekantene i bildet står jo i virkeligheten like langt fra hverandre, men på bildet konvergerer de mot et teoretisk punkt langt borte. Med definisjonen over kan vi gå videre og bevise ting som for eksempel at

$$\lim_{n\to\infty} y_n + z_n = G + L \qquad \text{dersom} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = G \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = L$$

og så videre, men det skal ikke vi gjøre, det blir for langt og teknisk, og vi har andre ting vi må gjøre. Hvis du er interessert kan du lese her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_sequence`
men det er ihvertfall nå enkelt å definere konvergent rekke:
En rekke er konvergent dersom partialsummene danner en konvergent følge.

$\boxed{\text{3 - coup de grace}}$ Vis at den geometriske rekken divergerer når $x = -1$.

Du har i bunn og grunn summert ganske mange rekker til nå i livet. La oss se på to som er så elementære at du antagelig aldri har ofret dem en tanke.

$\boxed{8}$ Arealet under kurven $y = x$ mellom $x = 0$ og $x = 1$ er som alle vet $1/2$. Sett opp en øvre og en nedre riemannsum på jevn partisjon og regn ut hva som skjer når partisjonen blir finere og finere.
(Hint: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$)

$\boxed{9}$ Prøv arealet under kurven $y = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 1$, som alle vet er $1/3$. Selv Arkimedes visste dette, og han daua for over to tusen år siden.
(Hint: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

En klassiker i rekkekonvergensspørsmålet er noe som kalles **sammenlikningstesten**. La y og z være positive følger, med $y_n \leq z_n$ for alle n. Det er ikke så veldig vanskelig å vise at

Dersom $\sum y$ divergerer, divergerer $\sum z$.
Dersom $\sum z$ konvergerer, konvergerer $\sum y$.

Hvis man skal nyttiggjøre seg denne, må man kjenne til noen rekker. To hjørnesteiner er at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Den første kan utledes på flere måter. Du finner to av dem her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics)`

$\boxed{10}$ Kommer på eksamen.

Den andre kan utledes fra fourierrekken til trekantbølgen og noe som kalles Parsevals identitet. Det kommer vi tilbake til senere. Med disse to rekken og sammenlikningstesten i verktøykassen, er det mange rekker som lett kan analyseres:

$\boxed{11}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\boxed{12}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ $\boxed{13}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\boxed{14}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ $\boxed{15}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Dersom $\sum |z|$ er konvergent, sier vi at $\sum z$ konvergerer **absolutt**, og dersom denne ikke er konvergent, men $\sum z$ er, heter det **betinget konvergens**. En grei lifehack er at dersom z er en positiv og monotont synkende følge som konvergerer mot null, er

$$\sum_n (-1)^n z_n$$

alltid konvergent. Dette kalles en alternerende rekke. For eksempel er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

Ofte kan man finne ut hva en rekke konvergerer til ved å gjenkjenne at det er en taylor- eller fourierrekke evaluert i et eller annet punkt. Finn

$\boxed{16}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\boxed{17}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ $\boxed{18}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}$ $\boxed{19}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\boxed{20}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

En generalisering av den geometriske rekken kalles **potensrekke**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Du kjenner allerede fire stykker godt, den geometriske rekken og

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{og} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{og} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Potensrekker kan konvergere for noen verdier av x og divergere for andre, eller konvergere for alle x eller divergere for alle x. Det kommer an på følgen a. Sammenlikningstesten viser helt klart at om en potensrekke konvergerer for x, konvergerer den også for y dersom $|y| < |x|$, og dersom den divergerer for x, divergerer den også for alle y med $|y| > |x|$. Mengden av x slik at potensrekken konvergerer kalles **konvergensområdet**. Finn konvergensområdet til

$\boxed{21}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\boxed{22}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\boxed{23}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\boxed{24}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ $\boxed{25}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Hvis du er dreven i potensrekker, blir det banalt å regne ut en del grenseverdier. Finn

$\boxed{26}$ $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$ $\boxed{27}$ $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta}$ $\boxed{28}$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x}$

Du kan også stort sett integrere og derivere ledd for ledd og herje fra deg.

$\boxed{27}$ Uttrykk standardnormalfordelingsintegralet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2}\, dx$$

som en taylorrekke om 0, og skriv en kode som regner ut partialsummer. Sammenlikne kjøretid med trapesmetodekoden din fra i høst. Hva går kjappest for et gitt presisjonsnivå? (Hint: Søk opp "python cpu time" på nett om du ikke har gjort dette før.)

Det er for øvrig lett å finne ut hvor god approksimasjon en partialsum er når rekken er alternerende: `https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_series`

$\boxed{28}$ Hvor mange ledd må du ta med over for å approksimere integralet med en feil på under 10^{-2}?

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Finn konvergensområdet for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$\boxed{2}$ Finn taylorrekken til $f(x) = x \ln x$ om $x = 1$. For hvilke x konvergerer denne?

Det burde være klart at en rekke ikke kan konvergere med mindre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.