1 - 11 - LIKNINGER - LF

1-2 Se oppgave 6.

3-4 Du kan modifisere koden under til å løse dette problemet. Det som er interessant med oppgaven er at likningen $x \ln x = 1$ kan skrives om til formen $x = g(x)$ på minst to forskjellige måter. De to åpenbare er $x = e^{1/x}$ og $x = 1/\ln x$. For den første formen stabiliserer fikspunktiterasjonen seg på $r \approx 1.7632228343518968$ etter om lag 73 iterasjoner med $x_0 = 0.1$, mens for den andre formen konvergerer det ikke for noen startverdier.

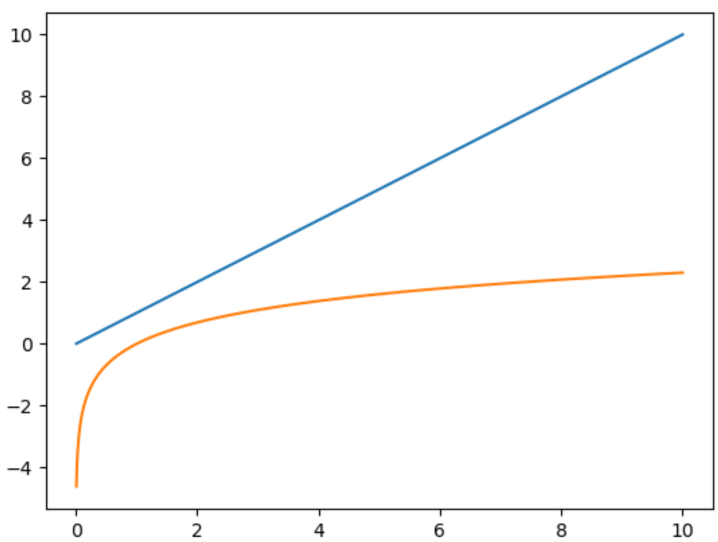
5-6 Her er min kode for å beregne iterasjoner for å finne dottietallet med fikspunktiterasjon (x) og Newtons metode (y):

```
import numpy as np
x=1
y=1

for i in range(15):
    x=np.cos(x)
    y=y-(y-np.cos(y))/(1+np.sin(y))
    print(x,y)
```

Newton går bra mye fortere, men feiler når x_0 er for langt unna den korrekte løsningen.

7 Et plott av $y = x$ og $y = \ln x$ avslører at dette problemet ikke har noen løsning. Ikke let etter løsningen før du vet at den eksisterer! MEN: Setter du $1 + 1j$ som startverdi og kjører $x_{n+1} = \ln x_n$, vil du få tak i den komplekse løsningen $r \approx 0.3181315052047577 + 1.3372357014306768i$



$\boxed{9}$ Kjører du Newtons metode med startverdi $x_0 = 1$ får du den reelle roten $r_1 = -1$ til maskinpresisjon på om lag ti iterasjoner. Kjører du med startverdi $x_0 = 1 + 0i$ får du den andre roten $r_2 = i$ på rundt fem iterasjoner, og har du gjort oppgave 21 fra økt 1 - 1, vet du at reelle polynomer alltid har komplekse røtter i komplekskonjugerte par, så den siste må være $r_3 = -i$. Vi kan dermed faktorisere polynomet som

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x + i)(x - i).$$

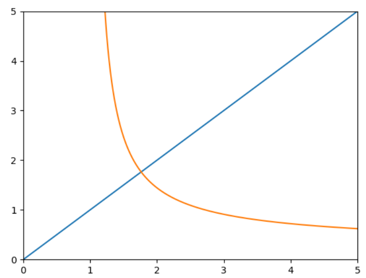
$\boxed{10\text{-}13}$ Det er lett å modifisere koden fra oppgave 6 til å løse alle disse.

$\boxed{16}$ Kjører du Newton $x_0 = 0$ på det første polynomet får du den reelle roten $r = 1$ til maskinpresisjon på om lag ti iterasjoner.[1] Men kjører du den samme startverdien på det andre polynomet, stabiliserer det seg på $r = 0.9999999851925497$ etter om lag tredve iterasjoner.
Hva skjer? Følg med senere i semesteret.
(Hvis du evaluerer polynomene litt smartere i newtoniterasjonen, får du en desimal eller to til. Google "Horner method polynomial evaluation".)

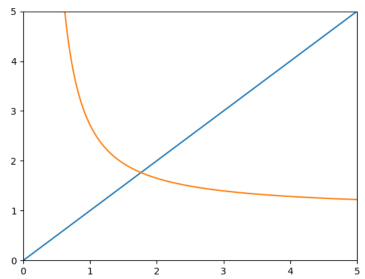
$\boxed{18}$ Likningen

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r)$$

indikerer at det er en god ide å sjekke om $|g'| < 1$. Hvis x_n og r ligger i et intervall der $|g'| < 1$, vil x_{n+1} ligge nærmere r enn x_n. Som erfart av oppgave 7 er det alltid en god ide å plotte de involverte funksjonene før man går igang med å lete etter løsninger, så la oss gjøre dette.



$g(x) = 1/\ln x$



$g(x) = e^{1/x}$

På det venstre plottet er $|g'(r)| > 1$ og på det høyre er $|g'(r)| < 1$. Med andre ord kommer $x_{n+1} = e^{1/x_n}$ til å konvergere og $x_{n+1} = 1/\ln x_n$ ikke til å konvergere. Merk ellers at $e^{1/x}$ og $1/\ln x$ er hverandres inversfunksjoner. Dette gir oss et et klassisk triks; siden inversderivasjonsformelen er gitt ved

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

og $r = g(r)$, kan du som regel finne r med iterasjonen $x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$ dersom $x_{n+1} = f(x_n)$ ikke funker. Merk ellers at x_0 ikke nødvendigvis må ligge i et intervall der $|g'| < 1$ for at fikspunktiterasjonen skal konvergere. Iterasjonen $x_{n+1} = e^{1/x_n}$ konvergerer selv om du starter med x_0 mellom 0 og 1, for den sender x_1 opp i et område der $|g'| < 1$. Starter du med $x_0 < 0$, tar det to iterasjoner. Hvis du er teknisk anlagt, kan du finne et fullstendig konvergensbevis for fikspunktiterasjonen på side 44 her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf`

[1] jeg vet det sto $x_0 = 1/2$ i oppgaven, men det er ikke så viktig

$\boxed{19}$ Denne hadde vi på konten i august, se oppgave 5:
`https://mortano.folk.ntnu.no/eksamen/tma4101-23k-lf.pdf`

$\boxed{20}$ Dersom

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = L_2$$

er

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = L_1 + L_2.$$

Velg ϵ. Vi må vise at det går an å velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n + y_n - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - L_1 - L_2| &= \\ |x_n - L_1 + y_n - L_2| &\leq \\ |x_n - L_1| + |y_n - L_2| \end{aligned}$$

Siden z konvergerer mot L_1, og w mot L_2, kan vi velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|y_n - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer $n < N$ at

$$|x_n - L_1 + y_n - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise.

$\boxed{21}$ Siden

$$\frac{2(n+1)}{n} = \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n}$$

følger det fra forrige oppgave at denne grenseverdien må være 2.

$\boxed{22}$ Velg ϵ. Vi må vise at det går an å velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|ax_n - aL| < \epsilon.$$

Men dette er trivielt siden

$$|ax_n - aL| = |a| \cdot |x_n - L|,$$

så vi kan velge N slik at $n > N$ impliserer $|x_n - L| < \epsilon/|a|$ og så har vi at $|ax_n - aL| < \epsilon$ dersom $n > N$.

$\boxed{23}$ Jepsi pepsi. Bytt ut alle absoluttverditegn med kompleks modulus og så er du gudd.