TMA4101/4106/4111/4121

1 - 10 - DIFFERENSIALLIKNINGER IV

$\boxed{1}$ Vi deler likningene på hverandre og får

$$\frac{\dot{x_1}}{\dot{x_1}} = \frac{ax_1 - bx_1x_2}{-cx_2 + dx_1x_2} = \frac{x_1(a - bx_2)}{x_2(dx_1 - c)}$$

eller

$$\dot{x_1}\left(d - \frac{c}{x_1}\right) = \dot{x_2}\left(\frac{a}{x_2} - b\right)$$

som integreres til

$$dx_1 - c\ln|x_1| = a\ln|x_2| - bx_2 + C.$$

$\boxed{2}$ For eksempel

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s \\ s \end{pmatrix}$$

gjør jobben.

$\boxed{3}$ Blir vel en trekvart enhetssirkel dette her. Den skal vi bruke mye de neste årene.

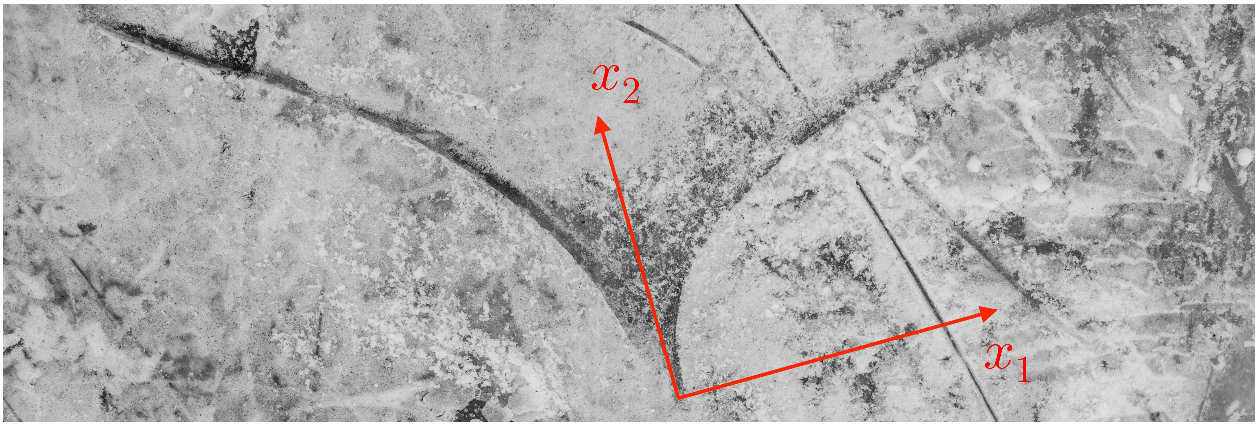
$\boxed{4}$ Dette blir en ellipse. Parametriseringen passer i ellipselikningen

$$\frac{x_1^2}{2^2} + x_2^2 = 1$$

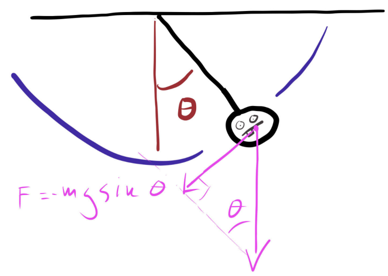
så den er sentrert i origo og har halvakser 2 og 1. Tangenten er

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ Tangenten er null i origo. Da kan kurven få en knekk, og kurven ser omtrent sånn ut:



$\boxed{6}$ Dette er bare en annen måte å spørre etter løsningen til balanseringen, som ble regna ut på den første siden i økt 1-5.



7 Newtons andre lov er $F = ma$. Kraften er $-mg \sin\theta$ og akselerasjonen er $a = l\ddot{\theta}$, slik at Newtons andre lov blir

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

eller

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

om du vil. Merk at massen til pendelen ikke har noe å si.

8 Hvis vi ganger opp med $ml\dot{\theta}$, får vi

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

som integreres til (husk kjerneregelen!)

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = C$$

som vi kjenner igjen som summen av kinetisk og potensiell energi (pendelens opphengspunkt er satt som nullnivå). I fysikkboken på videregående skole (ihvertfall i den fysikkboken vi brukte) var Newtons lover og konservering av totalenergi presentert som uavhengige konsepter. Men det er altså slik at den algebraiske likningen som forteller at energien er konservert, er en slags "løsning" av Newtons andre lov, som er en differensiallikning. Kunnskap om differensiallikninger er følgelig essensielt for å forstå grunnleggende fysikk.

Hvis du synes det er uvant å integrere ledd som $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ med kjerneregelen, kan du prøve å derivere $\left(\dot{\theta}\right)^2$ og $\cos\theta$ og se hva du får. (Husk at θ er en funksjon av t, altså $\theta(t)$!)

9 Hvis vi ganger opp med $\dot{x}$, får vi

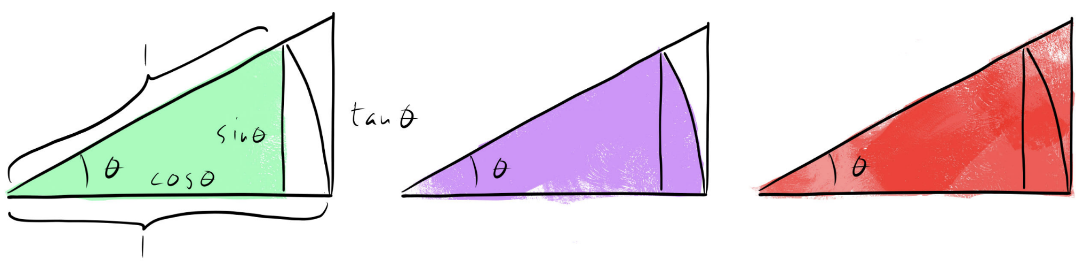
$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = 0$$

som kan integreres på samme måte:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

Denne forteller også at totalenergien er konservert, det er bare systemets drivende kraft som er litt annerledes.

10 Her gjelder det å kjenne til følgende figur.



Alle barn i barnehagen ser at det grønne arealet er minst, det røde størst, og det fiolette mellom dem. Det grønne arealet er

$$V_1 = \frac{\cos\theta\sin\theta}{2},$$

det fiolette

$$V_2 = \frac{\theta}{2}$$

og det røde

$$V_3 = \frac{\tan\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}.$$

Fra ulikheten $V_1 \leq V_2 \leq V_3$ får vi

$$\cos\theta\sin\theta \leq \theta \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Hvis vi antar at $\theta > 0$, og deler på $\sin\theta$, får vi

$$\cos\theta \leq \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

og snur vi denne på hodet, får vi

$$\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \cos\theta.$$

Siden

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

går de ytterste uttrykkene begge mot 1, og da skjønner alle barn i barnehagen at også

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Den formelle regelen jeg har brukt kalles "skviseregelen".[1] Dersom $\theta < 0$ blir argumentet helt likt, vi må bare tenke at arealene er negative og gjøre samme beregning.

11 Det karakteristiske polynomet er

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

som gir

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

og

$$\theta(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

12 En hel runde av pendelens gang får vi når innmaten i de trigonometriske funksjonene over går fra for eksempel 0 til 2π. Med andre ord kan tiden T pendelen bruker på en periode kan hentes ut fra likningen

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi.$$

Du kan måle perioden til foucaults pendel ganske nøyaktig ved å filme en haug med perioder med telefonen din og telle dem og så bruke dette estimatet til å gå din vei og komme tilbake mange perioder senere (hvor mange avhenger av hvor bra estimat du sitter på) og filme et nytt tidspunkt og så videre. Jeg holdt på med dette en høst, og kom vel til at perioden var sånn ca. 10.075 sekunder, som gir en lengde på om lag 25 meter og 25 centimeter.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem

14 Løsningstrajektoriene skal jo helst ligge på kurvene

$$dx_1 + bx_2 - c\ln|x_1| - a\ln|x_2| = C$$

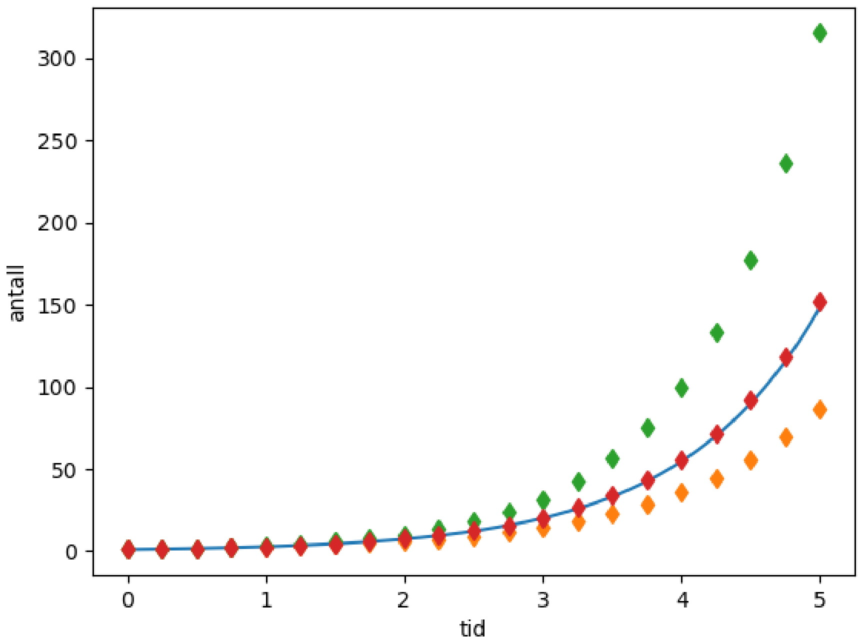
men vi ser tydelig fra figuren til høyre at eksplisitt Euler ikke klarer dette.

15 Her er kode:
`https://folk.ntnu.no/mortano/lotkavolterra/`
for å få et plott av f evaluert på den numeriske løsningstrajektorien. I mappen finner du også rustkode om du liker det.

16 `https://folk.ntnu.no/mortano/pendelen/`

17 `https://folk.ntnu.no/mortano/vanderpol/`

18 Denne koden
`https://folk.ntnu.no/mortano/ecoli/`
produserer plottet under. De gule diamantene er eksplisitt euler, de grønne er implisitt euler, og de røde er trapesmetoden.



20 Dette blir i prinsippet det samme som oppgave 18.

21 Eulers implisitte metode på dette problemet blir

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{T_{n+1}^2}\frac{e^{1/T_{n+1}}}{(e^{1/T_{n+1}}-1)^2}\left(T_{n+1} - T_K\right).$$

Denne klarer du ikke å løse med penn og papir, så her må vi lære noe nytt for å komme i mål. Det nye kalles **numeriske likningsløsere**, og er tema i kommende uke.

22 Spør Lars.