1 - 1 - TALL

På Gløshaugen og andre steder opererer vi stort sett med seks **tallmengder**:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Den innerste tallmengden, $\mathbb{N}$, kalles **naturlige tall**, og det er disse du bruker når du teller:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$$

De første sikre arkeologiske tegn på menneskelig bruk av tall er fra Mesopotamia og oppsto omtrent 3400 BC.[1] Havørnen kan telle til tre,[2] og det finnes visst en papegøye som kan telle til seks.[3] Derfor er det kanskje ikke helt riktig å si at tall i seg selv er en menneskelig oppfinnelse.

Men mennesket har funnet opp noen tall som ikke dyrene har bruk for. Det er for eksempel ikke nødvendig for en bavian eller en sjimpanse å vite hvordan man trekker tre fiken fra fem eller deler tre fiken på fem individer, for de lever i voldelige mannsdominerte hierarkier, og den som er høyest i hierarkiet spiser alltid opp alle fiknene om han er sulten. Men vi trenger slikt. Den neste tallmengden, $\mathbb{Z}$, kalles **hele tall**. Disse består av de naturlige tallene samt de negative heltallene og null:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2...\}$$

De negative tallene ble oppfunnet av en kineser omtrent 200 AD, selv om vi i vesten liker å si at de ble oppfunnet av Rene Descartes på 1600-tallet. Null er en litt eldre oppfinnelse, her snakker vi Egypt nesten to tusen år Kristus, men ovennevnte papegøye har visst en slags ide om hva null er, så jeg vet ikke helt. Den egyptiske hieroglyfen for null, nfr, betyr noe sånt som vakker. Mayaindianerne oppdaget også null, men det var mye senere, omtrent år null.

Den neste, de **rasjonale tallene** $\mathbb{Q}$, er alle brøker

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \text{der} \quad a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

De positive rasjonale tallene har antageligvis vært i bruk lengre enn de negative hele tallene, men det er ikke så godt å vite. Det er ikke utenkelig at noen mennesker hadde en ide om hvordan man skulle dele tre epler likt på fem personer lenge før skriftspråk oppsto, men de første sikre skriftlige kilder er fra noen hundre år før Kristus. Euklids Elementer fra omtrent 300 BC er kanskje den mest kjente. De rasjonale tallene har noen problemer - slett ikke alle tall kan skrives som en brøk! Dette har vært kjent i India siden omtrent 700 BC, og på lunsjrommet vårt fortelles røverhistorien at Hippasos ble kastet på havet av Pytagoras da han oppdaget dette. (Dette var visst pinlig for Pytagoras, som hele livet hadde påstått at alle tall kunne skrives som en brøk.)

$\boxed{1}$ Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_ancient_numeral_systems
[2] https://www.uib.no/ka/50862/levde-med-ørn
[3] https://link.springer.com/article/10.1007/s10071-006-0034-7

Det er noe litt uforløst over å ha et tallsystem der det ikke finnes noe tall for diagonalen i et kvadrat med sidekant 1, så derfor har vi funnet opp tallet

$$\sqrt{2} \approx 1.4142\ldots,$$

og en svær haug med liknende problemer har ledet oss til å finne opp **reelle tallene** $\mathbb{R}$. Det er ikke så lett å forklare hva disse er. Richard Dedekind var selv veldig spesifikk på at han skrev ned den første presise definisjonen den 24. november 1858, men Georg Cantor var først ute med å publisere en alternativ definisjon i 1871. De reelle tallene kan defineres på mange måter, men det enkleste er kanskje slik:

$$\mathbb{R} = \{\text{alle regler for å dele de rasjonale tallene i to}\}$$

For eksempel identifiserer vi $\sqrt[3]{2}$ med mengden av alle rasjonale tall p slik at $p^3 < 2$.

Et grundig studium av de reelle tall er mest interessant for matematikere, og Isaac Newton fant ut av differensialregning lenge før noen skjønte hva de reelle tallene var for noe. Hvis du skjønner at ikke alt kan skrives som en brøk, har du kommet lenger enn Pytagoras. [4] Det er viktigere å skjønne de **komplekse tallene** $\mathbb{C}$. Moderne teknologi er utenkelig uten komplekse tall. Den første som begynte å fikle med dette, var Girolamo Cardano i 1545, i forbindelse med løsninger av polynomlikninger. Cardano løste en tredjegradslikning, men man kan introdusere komplekse tall ved å studere noe enklere. Likningen

$$x + 2 = 0$$

har ingen positiv løsning, og derfor har vi funnet opp -2. Likningen

$$3x - 2 = 0$$

har ingen heltallig løsning, og derfor har vi funnet opp $\frac{2}{3}$. Likningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonal løsning, og derfor har vi funnet opp $\sqrt{2}$. Likeledes har ikke likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

noen reell løsning, så vi kan like gjerne finne opp et tall til. Det kalles den imaginære enheten, skrives i, og kjennetegnes ved at

$$i^2 = -1.$$

$\boxed{2}$ Hva må du gange med seg selv for å få -4?

[4] Antagelig er røverhistorien over ikke sann. Historikerne vet lite om Pytagoras.

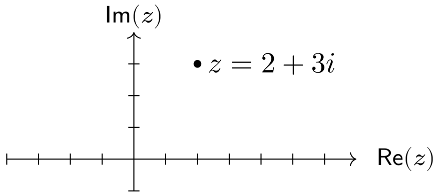
Hvis man skal skrive opp definisjonen av de komplekse tallene, kan det være lurt å ta følgende oppgave først. Husk abc-formelen for løsning av andregradslikninger.

$\boxed{3}$ Finn alle løsninger av likningen $x^2 + 2x + 2 = 0$, bruk i til å skrive opp svaret på en fornuftig måte, og faktoriser polynomet $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

Oppgavene over inspirerer oss til å definere komplekse tall på kartesisk form:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \quad \text{der} \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

De reelle tallene a og b kalles **realdelen** og **imaginærdelen** til z, og skrives $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$. Et komplekst tall likner på mange måter en vektor i $\mathbb{R}^2$. Vi kan tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i **det komplekse planet**.



Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$. La $z = a + bi$ og $w = c + di$. Vi har

$$\begin{aligned} z + w &= a + c + (b + d)i \\ z - w &= a - c + (b - d)i \\ z \cdot w &= ac - bd + (bc + ad)i \\ \frac{z}{w} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \end{aligned}$$

$$i^k = \begin{cases} 1 & k = 0, 4, 8 \ldots \\ i & k = 1, 5, 9 \ldots \\ -1 & k = 2, 6, 10 \ldots \\ -i & k = 3, 7, 11 \ldots \end{cases}$$

Merk at komplekse tall legges sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$. Multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$ i 'vanlig bruk'.

$\boxed{4}$ La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$. Regn ut $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, z/w, z^2 og z^3.

$\boxed{5}$ Utled regnereglene.

Den siste regneregelen over var kanskje ikke helt triviell. Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med z **konjugert**:

$$\overline{z} = a - bi$$

Merk at $z\overline{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall.

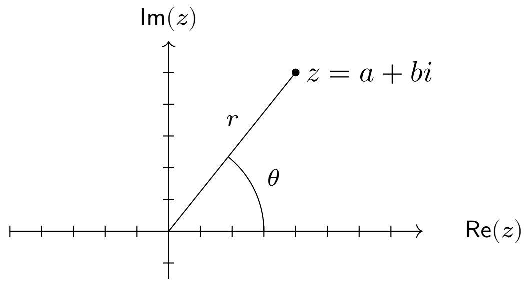
$\boxed{6}$ Vis at:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad z + \overline{z} = 2a$$

$$\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w} \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w} \qquad z - \overline{z} = 2bi$$

Avstanden r fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og vinkelen θ med den reelle aksen, kalles det komplekse tallet z sine **polare koordinater**. Foorhåpentligvis er du enig i at

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$



Vi skriver ellers

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne **absoluttverdi** eller **modulus** til z. Vinkelen $\theta = \arg z$ kalles **vinkelen** eller **argumentet** til z. Geometrien til de komplekse tallene er litt annerledes enn du kanskje er vant til.

$\boxed{7}$ Vis at $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

$\boxed{8}$ Velg et komplekst tall z og tegn z, iz, $-z$ og $-iz$. Hva ser du?

$\boxed{9}$ La $z = 1 + \sqrt{3}i$. Regn ut $z/|z|$ og tegn $(z/|z|)^k$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{10}$ La $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ og $w = 1 + i$. Tegn $z^k w$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.

Hvis du lurer på hvorfor du må lære om komplekse tall, så er det korte svaret at den imaginære enheten er fysisk sett akkurat like uunværlig som kvadratroten av to, du må bare kunne litt mer avansert fysikk før dette blir klart.[5] Dere som går MTKJ og MTELSYS skal alle lære kvantefysikk, og de første kvantedatamaskinene er allerede bygget,[6] så dette kan bli nyttig kunnskap for en fremtidig ingeniør.

For dere som går MTTK og skal styre satelitter og slikt, er antagelig **kvaternionene** $\mathbb{H}$ vel så viktige; man bruker dem til å holde styr på et legemes orientering i rommet. De ble oppdaget av W. D. Hamilton i 1843, og er en utvidelse av de komplekse tallene. Utvidelsen består i at man legger til to nye imaginære enheter j og k, definert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton fikk den sentrale aha-opplevelsen på tur over en steinbro midt i Dublin, og skrapte likningen umiddelbart inn i rekkverket på broen med en brevåpner han hadde i lommen. Inksripsjonen er dessverre vekk. Et kvaternion ser slik ut

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k.$$

der z_0, z_1, z_2 og z_3 er reelle tall. Realdelen z_0 kalles **skalardelen**, mens imaginærdelen $z_1 i + z_2 j + z_3 k$ kalles **vektordelen**.

$\boxed{11}$ Utled regnereglene

$$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

Likner dette på noe du har lært på gymnaset?
(Hint: du bør ha kryssproduktet og høyrehåndsregelen i bakhodet.)

Som du kan se er multiplikasjon mellom kvaternioner er ikke **kommutativt**. Dette er litt awkward i begynnelsen; hvis du ikke har vært med i abelkonkurransen eller noe, er antagelig alt du har sett til nå i livet vært kommutativt.[7] Det er viktig å venne seg til at enkelte ting ikke er kommutativt, for kommutering ligger i bånn for Heisenbergs usikkerhetsprinsipp.[8]

$\boxed{12}$ Regn ut

$$zw = (z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)(w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

og

$$wz = (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)(z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)$$

[5] https://www.scientificamerican.com/article/quantum-physics-falls-apart-without-imaginary-numbers/
[6] https://www.scientificamerican.com/article/googles-quantum-computer-achieves-chemistry-milestone/
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Commutative_property
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

Vi konjugerer kvaternioner akkurat som vi konjugerer komplekse tall:

$$\overline{z} = z^* = z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k$$

$\boxed{13}$ Akkurat z og $\overline{z}$ kommuterer faktisk med hensyn på multiplikasjon. Regn ut $z\overline{z}$ og $\overline{z}z$.

Dette kan brukes til å definere absoluttverdi $\sqrt{\overline{z}z}$, samt finne invers.

$\boxed{14}$ La

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k \qquad \text{og} \qquad z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k)$$

Vis at $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

Jeg foretrekker vanligvis å begynne indeksering fra en og ikke null, men akkurat for kvaternioner er det en fordel å begynne på null. [9] Grunnen er at man i anvendelser ofte er interessert i å tenke på imaginærdelen som et punkt i $\mathbb{R}^3$. Regnereglene for de imaginære enhetene i, j og k illustrerer nemlig hvorfor vi i gamle dager skrev

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasisen i $\mathbb{R}^3$, og

$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$$

for vektorer i $\mathbb{R}^3$. Denne notasjonen er nå gått av moten, og det er i bunn og grunn synd, for hvis man skriver alt slik, kan man bruke høyrehåndsregelen til å huske formelen for kryssprodukt.

$\boxed{15}$ La

$$z = z_1 i + z_2 j + z_3 k$$

og

$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

og regn ut $\overline{z}w$ og se om det ser kjent ut.

[9] Det er et mysterium hvorfor alle programmeringsspråk insisterer på å indeksere fra 0 istedet for 1. Hvis du har en vektor med tre elementer, er det mer naturlig å kalle dem $x[1]$, $x[2]$ og $x[3]$ enn $x[0]$, $x[1]$ og $x[2]$, og skriver du for i in range(n) i python må du huske på at denne går fra 0 til n-1, ikke fra 1 til n: `https://en.wikipedia.org/wiki/Off-by-one_error`

FLERE OPPGAVER

$\boxed{16}$ Vis at $|z|^2 = |z^2|$. Er $|z|^3 = |z^3|$?

$\boxed{17}$ Richard Feynman kalte formelen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

for "vår juvel". Denne kan du utlede ved å derivere funksjonen

$$f(\theta) = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{e^{i\theta}}$$

og så se hva som skjer når $\theta = 0$.
(Derivasjonsreglene du kjenner fra gymnaset også funker når det står en i her og der.)

$\boxed{18}$ Likningen

$$z^n = w$$

der w er et spesifisert tall har alltid n distinkte løsninger dersom du kan komplekse tall. Finn alle løsninger til

$$z^5 = 1 + i.$$

(Hint: Bruk Eulers formel. Du har lov til å bruke vanlige regneregler for potenser. Se også oppgave 9 og 10 over for inspirasjon.)

$\boxed{19}$ Mer generelt gjelder at alle polynomlikninger har en løsning dersom du kan komplekse tall. Løs likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

og faktoriser polynomet

$$p(x) = x^2 + x + 1.$$

$\boxed{20}$ Enn $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$?

$\boxed{21}$ Dersom p er et polynom og $p(z) = 0$, sier vi at z er en rot for polynomet. Vis at dersom et polynom har reelle koeffisienter, kommer røttene i komplekskonjugerte par.

LØSNINGSFORSLAG

$\boxed{1}$ Det finnes ingen hele tall slik at

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Dette kan vi bevise som følger. Anta at det finnes hele tall m og n slik at likningen over holder. Vi kan anta at m og n ikke har noen felles faktorer, for hvis de hadde hatt det, kunne vi bare forkortet brøken til de ikke lenger hadde det. Vi ganger nå hele likningen med n, og kvadrerer, slik at vi får

$$2n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være et partall. Men dersom m^2 skal være et partall, må jo m være et partall, og dette betyr at m^2 må være delelig med fire. Dette betyr at $m^2/2$ er et partall, og hvis vi skriver

$$n^2 = \frac{m^2}{2},$$

ser vi at n^2 er et partall, på da må n være et partall. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet jo at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 2 må være en felles faktor allikevel. Med andre ord er det noe som er galt her. Det som er galt, er antagelsen om at man i det hele tatt kan skrive

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

for hele tall m og n.

Eksemplet over illustrerer at dersom du har et kvadrat med sidekant 1, finnes det ikke noe rasjonalt tall som beskriver diagonalens lengde. Majoriteten av alle mennesker på jorden trenger matematikk først og fremst som et redskap for presis kvantifisering av verden rundt oss, så dette er rett og slett ikke bra nok. Eksemplet over har vært kjent for menneskeheten i flere tusen år. Det er lett å utvide argumentet til å vise at for eksempel $\sqrt[3]{2}$ også ikke kan skrives som en brøk. De aller fleste tall kan faktisk ikke skrives som en brøk.[10]

$\boxed{2}$ Lett! $(2i)^2 = 2i \cdot 2i = 4 \cdot i^2 = -4$.

$\boxed{3}$ Løser vi likningen

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i,$$

slik at

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i)$$

(Gang ut og sjekk at det stemmer.)

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Countable_set

$\boxed{4}$ Vi beregner

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i \\ &= -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} \\ &= \frac{22}{41} + \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi ganger sammen komplekse tall slik:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deler dem slik:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Utledning av formlene for addisjon og subtraksjon er trivielle.

TMA4101/4106/4111/4121

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNINGSFORSLAG