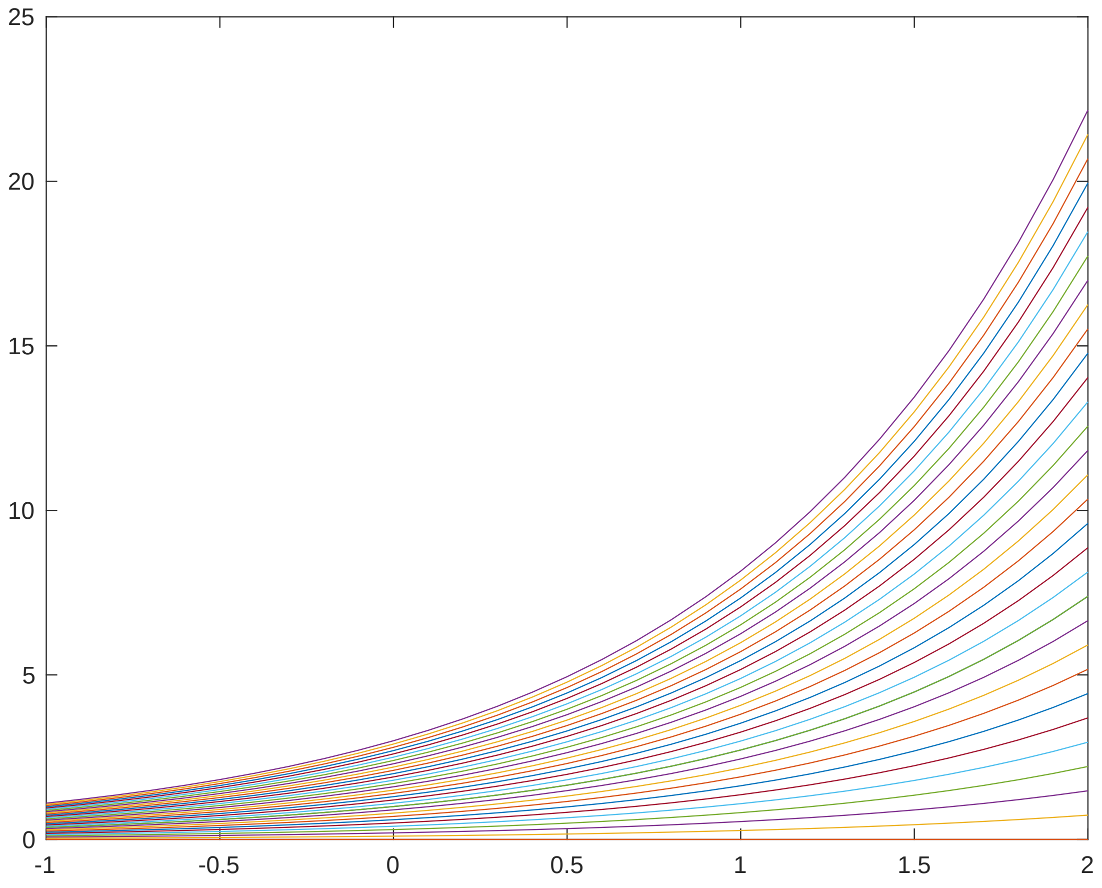
1 - 1 - DIFFERENSIALLIKNINGER I - LF

$\boxed{1}$ Likningen sier at funksjonen skal være sin egen derivert. Det finnes bare en slik funksjon, og det er $x(t) = e^t$. Nei, vent, det korrekte svaret er

$$x(t) = ce^t$$

der c er en vilkårlig konstant, for denne passer i likningen uansett hva c er. Vi har altså en uendelig familie av løsninger; her er plot for tredve forskjellige verdier av c:



$\boxed{4}$ Løsningen er

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}.$$

Dette kan du sjekke selv ved å sette inn i likningen, og det er klart at $x(0) = x_0$.

$\boxed{5\text{-}8}$ La oss begynne med 8. Dersom t måles i 20-minutters inkrementer, går det for eksempel 20 minutter mellom $t = 0$ og $t = 1$. På denne tiden skal antall bakterier dobles, så da må vel $\lambda = \ln 2$, slik at

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{(\ln 2)t} = x_0 2^t.$$

Å øke t med en korresponderer nå til å øke antall bakterier med en faktor to.

Dette er omtrent slik du må tenke. La oss ta oppgave 7. [1] Dersom t måles i sekunder, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått 1200 sekunder. Vi kan egentlig gjøre det enkelt og si at det skal dobles fra $t = 0$ til $t = 1200$:

$$2 = e^{1200\lambda}$$

som gir $a = (\ln 2)/1200$. Samme med de andre. Dersom t måles i minutter, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått tjue minutter, så vi får

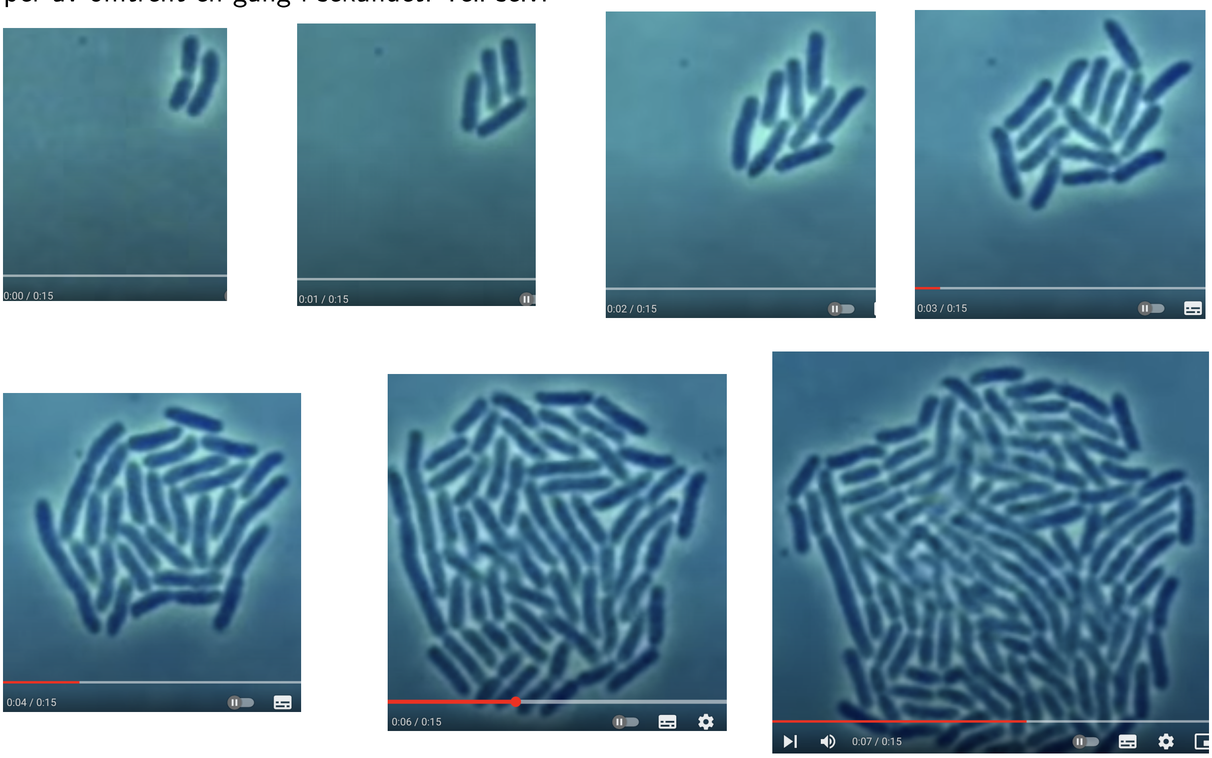
$$2 = e^{20\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/20$. Dersom t måles i timer, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått en tredjedels time, så vi får

$$2 = e^{\lambda/3}$$

som gir $\lambda = 3\ln 2 = \ln 8$.

$\boxed{5678}$ Ett sekund i denne videoen er antagelg omtrent 20 minutter i virkeligheten. Her er skjerdumper av omtrent en gang i sekundet. Tell selv:



$\boxed{9}$ Vi vet at løsningen er

$$x(t) = x_0 2^{-t/5700}.$$

Nå er det irrelevant hva x_0 er, så lenge vi finner det tidspunktet der $x(t)$ er nede i en tiendedel av x_0, som gir likningen

$$\frac{1}{10} = 2^{-t/5700}$$

som gir

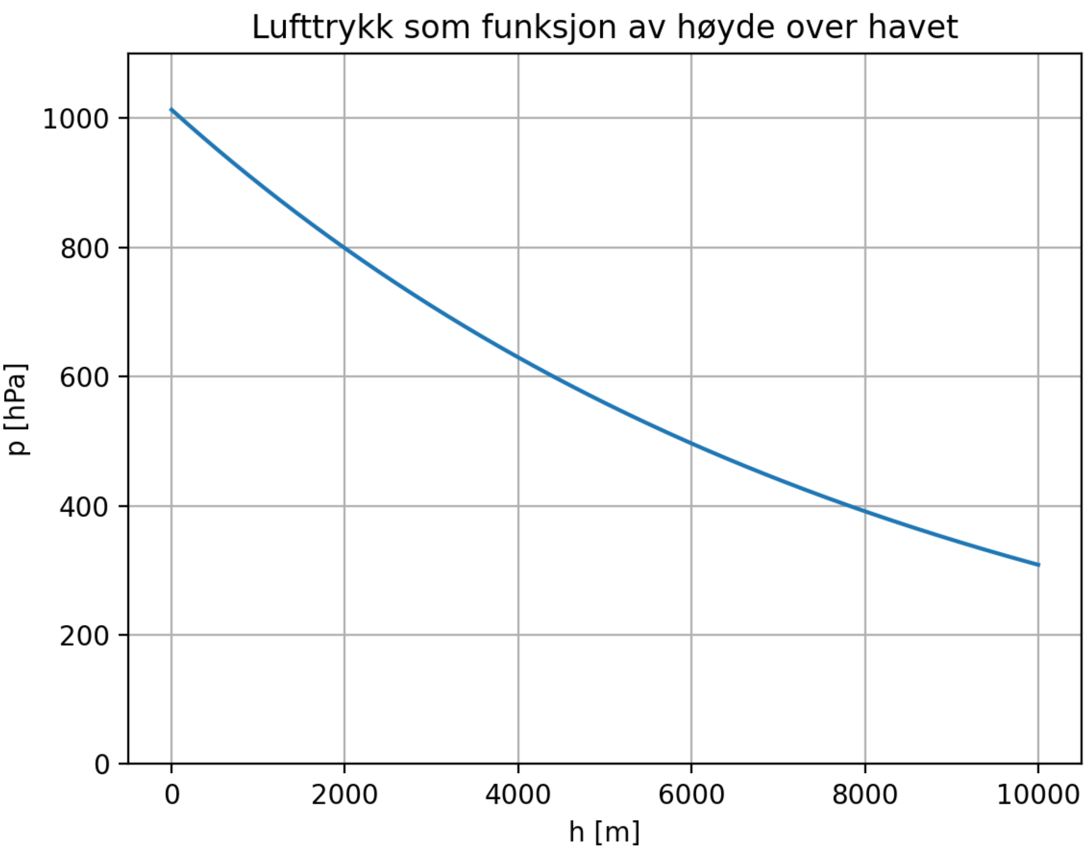
$$\text{KATTENS DØD} = t = 5700\frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

[1] SI-enheter har en viss forrang over andre enheter; en gang krasjet visst et ubemannet månelandingsfartøy fordi en gjeng med amerikanere hadde skrevet noe software der det var brukt fot og pund i stedet for meter og kilogram.

Katten døde altså for om lag 19000 år siden. Dette er omtrentlig, for C-14-konsentrasjonen var ikke den samme da som nå, og forskere krangler ennå om hva det nøyaktige C-14-innholdet i atmosfæren har vært de siste 50000 årene. C-14 dannes når nøytroner fra kosmisk stråling kræsjer med N-14-isotoper høyt oppe i troposfæren, men et par atombombesprengninger (som produserer mye C-14) og massevis av CO_2 fra fossilt brennstoff (som produserer mye C-12) har gjort alt litt komplisert.

11 Av og til gir selv enkle modeller korrekt prediksjon ved eksperiment. Ecolimodellen gir sånn høvelig riktig vekst i begynnelsen (den bryter sammen når det begynner å bli trangt), og kondensatormodellen (lenger ned) er også ganske bra.

Modellen i denne opppgaven er fullstendig håpløs. Studass Even har laga et plotteskript til dere, som ligger her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/even/`
og det produserer følgende plot:



I denne modellen må man gjøre antagelser på massen til et typisk luftmolekyl. Et "luftmolekyl" finnes jo ikke, luft består av forskjellige konsentrasjoner av forskjellige gasser og disse konsentrasjonene endres med høyden over havet. Tyngdeakselerasjonen endres med høyden over havet, og det gjør selvfølgelig temperaturen også. Med andre ord kan vi ikke forvente at denne modellen treffer særlig bra, se her:
`https://snl.no/lufttrykk`

og her:
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_40.html

$\boxed{12}$ Her er det bare å gjøre akkurat det samme. Steg 1 er å skrive alt som inneholder x på én side

$$\beta = \dot{x}(t) - \lambda x(t)$$

gange likningen med $e^{-\lambda t}$, og så observere at

$$\beta e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}\Big(\dot{x}(t) - \lambda x(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(e^{-\lambda t}x(t)\Big).$$

La oss nå ta det ubestemt integral på hver side, og få

$$-\frac{\beta}{\lambda}e^{-\lambda t} + c = e^{-\lambda t}x(t)$$

Nå ganger vi opp med $e^{\lambda t}$ og løser for x og får

$$x(t) = ce^{\lambda t} - \frac{\beta}{\lambda}.$$

Kravet $x(0) = x_0$ gir

$$x(0) = c - \frac{\beta}{\lambda} = x_0$$

som gir $c = x_0 + \frac{\beta}{\lambda}$ og

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right)e^{\lambda t} - \frac{\beta}{\lambda}.$$

$\boxed{13}$ Vi skriver Newtons avkjølingslov

$$\dot{T}(t) + \alpha T(t) = \alpha T_K$$

og ser at $\lambda = \alpha$ og $\beta = \alpha T_K$.

$\boxed{14}$ Vi har fått at $T_0 = 6$, $T_k = 20$ og $T(2) = 13$, dersom t måles i timer. Dette gir

$$13 = T(2) = 20 + (6-20)e^{-2\alpha},$$

slik at $\alpha = \frac{1}{2}\ln 2$.

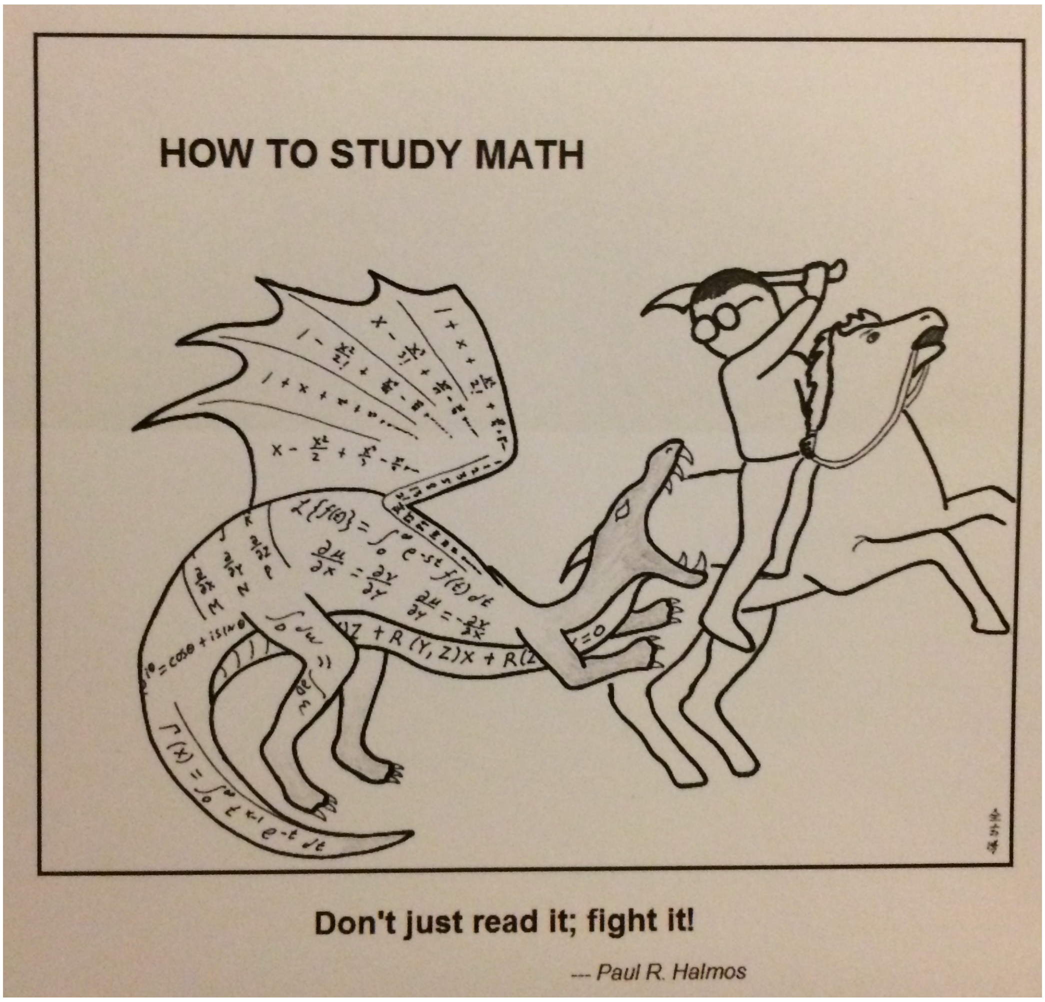
$\boxed{15}$ Vi har fått at $T_0 = 15$ og $T(1) = 12$. Dette gir

$$12 = T(1) = T_K + (15 - T_K)e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = T_K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{15}{\sqrt{2}},$$

slik at $T_k = \frac{12-\frac{15}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{12\sqrt{2}-15}{\sqrt{2}-1}$.

$\boxed{\text{Mer realistisk 15}}$ Her må man nesten bruke regresjon. Dette lærer du i TMA4245 til våren:
https://tma4245.math.ntnu.no/enkel-lineær-regresjon/
Inntil videre får du bare prøve og feile og plotte i python.

16



17 Her er det viktig å skjønne at dette er akkurat den samme likningen som Newtons avkjølingslov, det er bare det at den er skrevet ned litt annerledes. Løsningen er den samme, men de fysiske parametrene er annerledes. Dersom man er i tvil, er det tryggest å ta alt fra scratch. Likningen er

$$Li'(t) + Ri(t) = 9.$$

Dersom vi deler på L, blir den

$$i'(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{9}{L}.$$

og vi ser nå at det lønner seg å gange med $e^{Rt/L}$, for da kan vi bruke integrasjonstrikset, og skrive

$$\frac{d}{dt}\left(e^{Rt/L} i(t)\right) = \frac{9}{L} e^{Rt/L}.$$

slik at

$$e^{Rt/L} i(t) = \frac{9}{R} e^{Rt/L} + c$$

eller

$$i(t) = \frac{9}{R} + ce^{-Rt/L}$$

og bruker vi $i(0) = 0$, får vi

$$i(t) = \frac{9}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

fremdeles på formen $ce^{at} - b/a$, men nå heter den ukjente $i(t)$ (i er vanlig bokstav for strøm, og derfor bruker de j for den imaginære enheten i elektroteknikk), og $Ri(t)$ er på motsatt side av likningen i forhold til lenger opp. Løsningen er

$$i(t) = \frac{9}{R} + ce^{-Rt/L}$$

og bruker vi initialkravet, får vi

$$0 = i(0) = \frac{9}{R} + c$$

slik at løsningen blir

$$i(t) = \frac{9}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right).$$

Når t går mot uendelig går $i(t)$ mot $9/R$:

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{9}{R}.$$

Dette er det samme som strømmen ville vært om du erstattet spolen med en ideell leder. Dette indikerer at en spole oppfører seg som en ideell leder når det ikke er endring i strøm.

$\boxed{18}$ Dette blir identisk med oppgaven over. Løsningen er

$$v(t) = 9 + ce^{-t/RC}$$

og bruker vi initialkravet, får vi

$$0 = v(0) = 9 + c$$

slik at løsningen blir

$$v(t) = 9\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

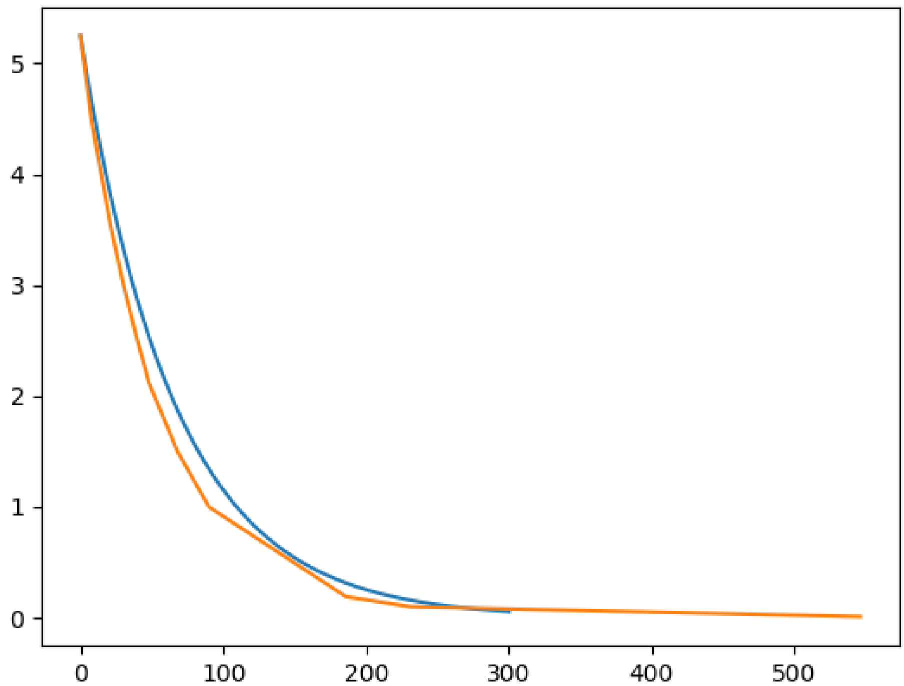
$\boxed{19}$ Takk til Håvard Lien Juvik og hans kamerat Kjell Senås som gjorde dette eksperimentet i forelesning. Det var en kondensator på 66 mikrofarad [2] og en motstand på 2.2 megaohm. En kondensator er en ting som samler opp elektrisk potensiell energi på noen metallplater. I forelesning ble den først ladet opp med et batteri, og så målte gutta krutt utladningsprosessen. (De filma multimeteret med en telefon og henta ut spenninger og tidspunkt etterpå.) Dette gir difflikningen

$$RC\dot{v} + v = 0$$

med initialkrav sånn ca $v(0) = 5.3$ volt eller noe i den dur. Løsningen er

$$v(t) = v_0 e^{-t/3}$$

og her er plot av løsning (blå) og empiriske målinger (oransje). Denne modellen ser ut til å passe ganske bra med empiri. Det er fordi vi vet sånn cirka hvordan motstand, kondensator og strømledning funker.



$\boxed{22}$ Vi kan bruke konvolusjonsformelen, eller bare gjøre hele greia fra scratch ved å dele ut RC:

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{RC}\sin(\omega_0 t)$$

gange med $e^{t/RC}$:

$$e^{t/RC}\left(\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t)\right) = \frac{1}{RC}\sin(\omega_0 t)e^{t/RC}$$

[2]Faktisk var det tre kondensatorer på 22 mikrofarad satt i parallell. Dette var de største kondensatorene Lars fant på kontoret sitt rett før forelesningen.

og så bruke det vanlige trikset og skrive

$$e^{t/RC}v(t) = \frac{1}{RC}\int \sin(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt$$

Integralet på høyre side er litt hårete å beregne, men ikke umulig. Jeg lærte det på gymnaset. Hvis du tar to delvisintegrasjoner:

$$\begin{aligned}\int \sin(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt =& RC\sin(\omega_0 t)e^{t/RC} - RC\omega_0\int \cos(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt\\ =& RC\sin(\omega_0 t)e^{t/RC} - RC\omega_0\left(RC\cos(\omega_0 t)e^{t/RC} + RC\omega_0\int \sin(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt\right)\\ =& RC\sin(\omega_0 t)e^{t/RC} - R^2C^2\omega_0\cos(\omega_0 t)e^{t/RC} - R^2C^2\omega_0^2\int \sin(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt\end{aligned}$$

kommer du tilbake til integralet du starta med. Så da er det bare å løse likningen for dette integralet, og få at (husk integrasjonskonstanten c)

$$\frac{1}{RC}\int \sin(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt = \frac{1}{1+R^2C^2\omega_0^2}\left(\sin(\omega_0 t)e^{t/RC} - RC\omega_0\cos(\omega_0 t)e^{t/RC} + \frac{c}{RC}\right)$$

slik at

$$\begin{aligned}v(t) =& \frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{1+R^2C^2\omega_0^2}e^{-t/RC}\int \sin(\omega_0 t)e^{t/RC}\,dt\\ =& \frac{1}{1+R^2C^2\omega_0^2}\left(\sin(\omega_0 t) - RC\omega_0\cos(\omega_0 t) + \frac{c}{RC}e^{-t/RC}\right)\end{aligned}$$

Til slutt kan vi bruke initialkravet $v(0) = v_0$ og få at

$$\frac{1}{1+R^2C^2\omega_0^2}\left(\frac{c}{RC} - RC\omega_0\right) = v_0$$

som gir oss A, men folk borte på elsys bryr seg katta om initialkrav, så nå orker vi ikke mer.