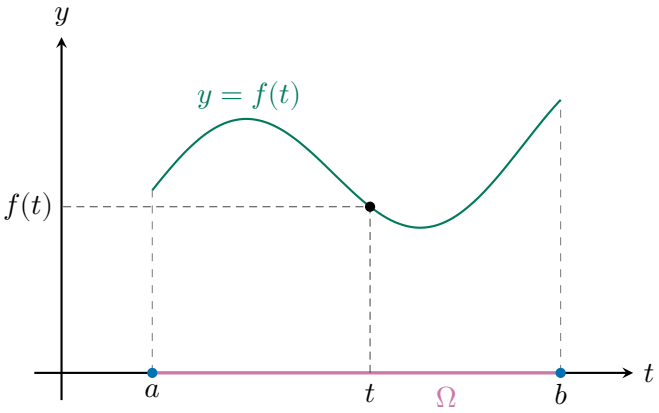
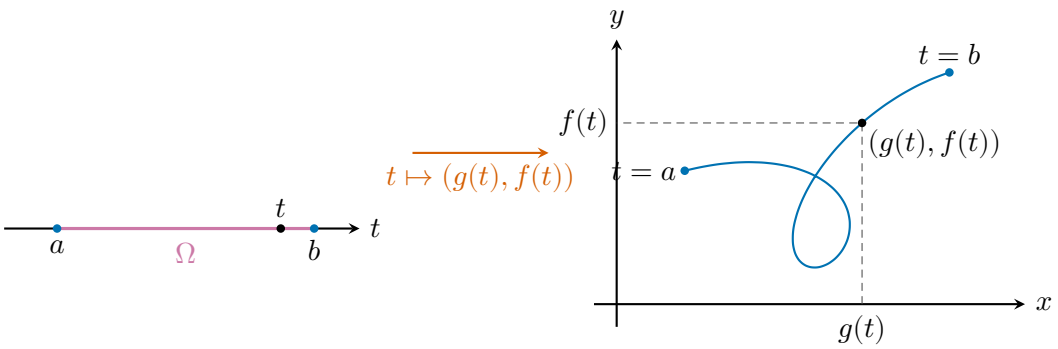
1 PARAMETRISERTE KURVER

En funksjon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ der Ω et et begrenset intervall, tegnes gjerne slik:



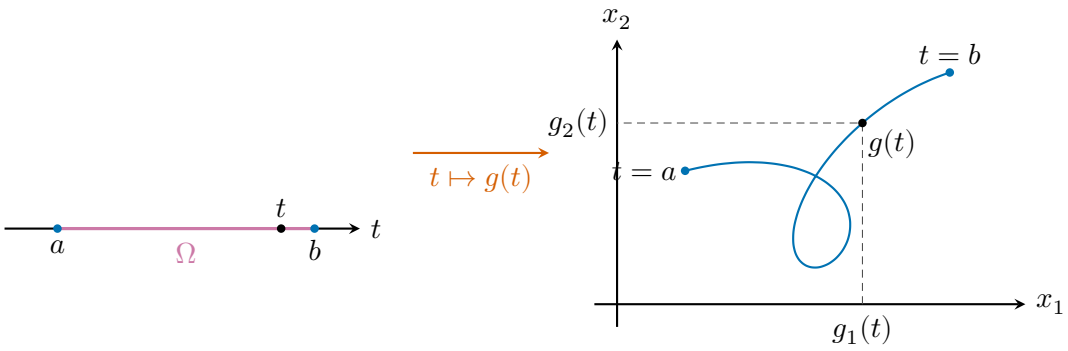
Koordinatene til et punkt på kurven er $(t, f(t))$. Dersom vi setter inn en funksjon også i første komponent, får vi $(g(t), f(t))$ - dette gir mulighet til å tegne mer spennende kurver.[1]



La oss nå omdøpe f og g til g_1 og g_2 og x og y til x_1 og x_2 og skrive alt på høykant slik

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x = g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

samt tegne figuren på nytt:



[1] https://www.wolframalpha.com/input/?i=random+logo+curve

Dette kalles **parametrisert kurve**.[2] Trikset med å skjønne nye funksjoner er ofte å herje litt med funksjoner du har i ryggraden. Funksjonen $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

er en klassiker; den gir oss enhetssirkelen. Denne kjenner alle barn i barnehagen.

1 Finn parametriseringer for sirklene gitt av likningene

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \qquad \text{og} \qquad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3 = 0$$

2 Finn en parametrisering for ellipsen som tilfredsstiller $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.

Vi skriver $\mathbb{R}^{m\times n}$ for det mn-dimensjonale vektorrommet av $m \times n$-matriser, slik at søylevektorer er inneholdt i $\mathbb{R}^{m\times 1}$ og radvektorer i $\mathbb{R}^{1\times n}$. Vi kan rotere grafer med den todimensjonale rotasjonsmatrisen fra forrige økt. Dette er en funksjon $R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ gitt ved

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3 Finn en parametrisering for en ellipse som ligger med førtifem graders vinkel på koordinataksene.

Tangenten[3] til x er gitt ved

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Dersom tangenten eksisterer, sier vi at x er **deriverbar**. Definisjonen impliserer at

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}.$$

Hvis man tenker at Γ er trajektorien til en flue og at fluen har speedometer, er **banefarten**

$$|x'(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^T\dot{x}(t)} = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + \cdots + (\dot{x}_n(t))^2}$$

det tallet som vises på speedometeret ved tiden t.

4 Finn tangent og banefart for kurvene i oppgavene over.

Buelengden til Γ finner du ved å integrere banefarten:[4]

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$$

5 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at integralet over blir buelengden til kurven, og regn ut lengden til $x : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1 + t^2) \\ 2\arctan t \end{pmatrix}.$$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_equation
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Arc_length

Du kan parametrisere en kurve Γ på mange måter. Men det er en som er litt spesiell, **buelengde-parametriseringen**. Dette er den parametriseringen der t er buelengden til kurven. Denne er som regel vanskelig eller umulig å finne et eksplisitt uttrykk for, men regnes som den mest "naturlige" parametriseringen, og brukes ofte i teoretiske utgreininger.

6 En flue flyr langs en **sirkulær heliks**[5] gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Finn tangenten, banefarten, buelengden og buelengdeparametriseringen.

En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles *glatt* dersom $f \in \mathcal{C}^\infty$. For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ har ordet en litt annen betydning.

7 Skisser funksjonen $x : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

Dette eksemplet er en klassiker. Komponentene $x_1(s) = s^3$ og $x_2(s) = s^2$ er glatte (altså inneholdt i $\mathcal{C}^\infty$), men kurven til x har en kusp i origo, noe $\mathcal{C}^\infty$-funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ ikke kan. Grunnen er at banefarten er null når $s = 0$, og da kan alt skje. Hvis fluen stopper helt opp, kan den begynne å kjøre en annen vei når den begynner å fly igjen, og da kan kurven få en knekk. **Enhetstangentvektoren**[6] ved tiden t er gitt ved

$$T(t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}.$$

8 La x være funksjonen fra forrige oppgave, og vis at

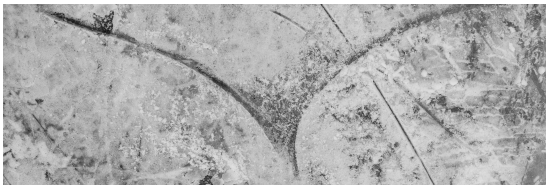
$$\lim_{t \to 0^+} T(t) \neq \lim_{t \to 0^-} T(t)$$

Vi sier at en funksjon $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ er **glatt** i t dersom enhetstangentvektoren eksisterer og dreier på et kontinuerlig vis etterhvert som vi beveger oss langs kurven. En tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse for dette er at komponentfunksjonene er deriverbare og $|\dot{x}(t)| \neq 0$.

9 Hva med

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}?$$

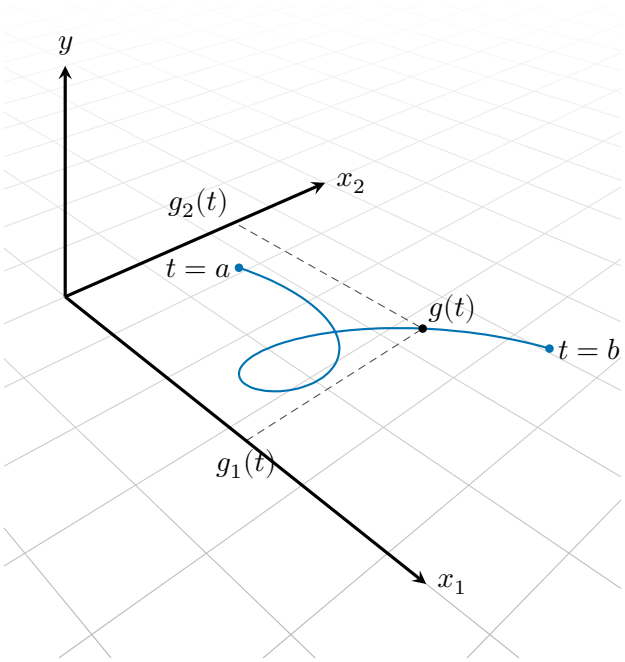
10 Hva har skjedd her?



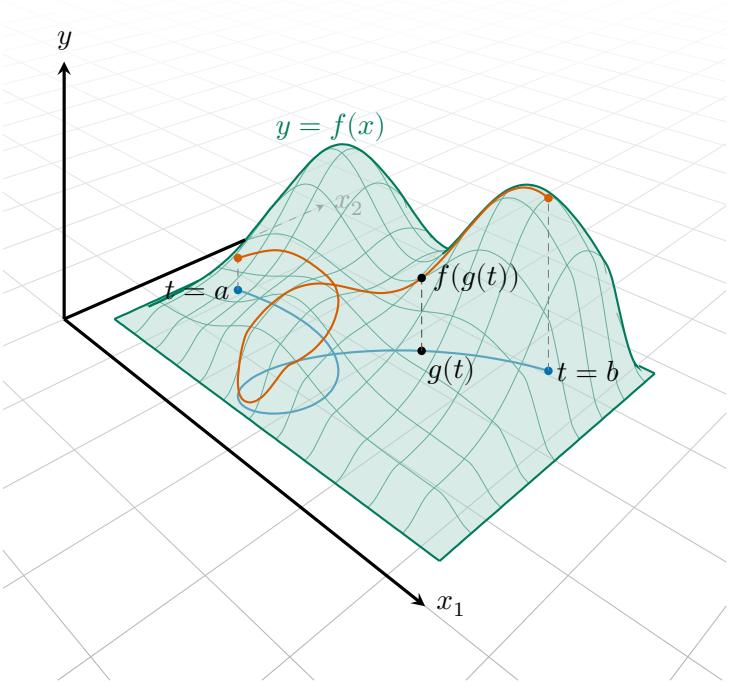
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Helix
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent_vector

2 SKALARFELT

Nå skal vi la en parametrisert kurve med to komponenter ligge i x_1x_2-planet slik:



Nå tenker vi at den parametriserte kurven er en fottur, og så legger vi på et terreng:



Terrenget er en funksjon av to variable, og vi skriver

$$f(x) \qquad \text{eller} \qquad f(x_1, x_2)\,.$$

Tenk på x som en gps-koordinat og på $f(x)$ som den korresponderende høyden over havet. Matematisk er det ingen forskjell på dette og det vi gjorde i en romlig variabel og tid, men de mentale modellene er helt annerledes. Alt er enklest å komme igang med om du er vant til å lese kart.



Et kart er en todimensjonal representasjon av et tredimensjonalt terreng, og med litt trening leser man dette omtrent like godt som om man så terrenget med sine egne øyne, eller faktisk bedre. **Nivåkurvene**[7] til $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kurver i x-planet der funksjonshøyden er konstant - dette er ekvidistanselinjene på orienteringskartet. Disse er gitt ved

$$c = f(x)\,,$$

og forskjellige verdier for c gir forskjellige høyder over x-planet.

11 Skisser nivåkurvene til $f(x) = x_1 + 2x_2$.

Et polynom i to variable er gitt ved

$$p(x) = \sum_{k,m} a_{km} x_1^k x_2^m$$

Dersom $k + m \leq n$ og $k + m = n$ for minst en kombinasjon av k og m, sier vi at polynomet har orden n. For eksempel er et generelt førsteordens polynom gitt ved

$$p(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0.$$

Grafen til denne blir alltid et plan i $\mathbb{R}^3$. Et generelt andreordens polynom er gitt ved

$$p(x) = a_{20} x_1^2 + a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0$$

Nivåkurvene til andreordens polynomer er de berømte kjeglesnittene.[8] Parabelen ($x_2 = x_1^2$) og sirkelen ($\|x\| = 1$) og ellipsen[9]

$$\frac{(x_1 - y_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{b^2} = 1$$

kjenner du fra før. For en generasjon siden måtte sivingstudenter kunne alle disse på fingrene, men idag fokuserer vi mer på andre ting. Finn og skisser nivåkurvene til flatene gitt ved

12 $z = 4x_1^2 + 5x_2^2$.

13 $z = 4x_1^2 + 8x_1 + 5x_2^2 - 10x_2 + 9$.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Level_set
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

Et klassisk eksempel på et polynom av to variable er den ideelle gasslov. Det er enklest å tenke på denne som en utledet regel i statistisk mekanikk.[10] Den sier at i en ideell gass følger trykket p, temperaturen T og volumet V formelen

$$\frac{pV}{T} = Nk,$$

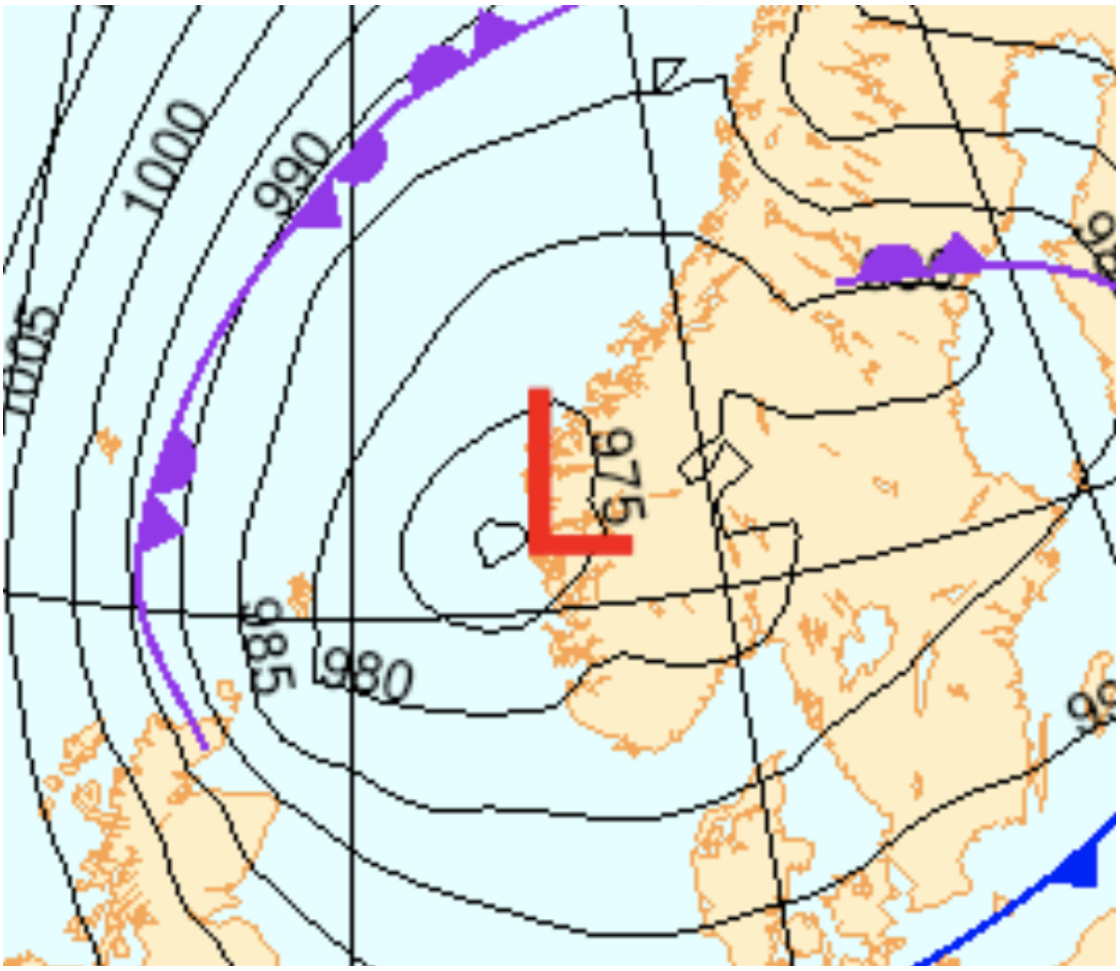
der $k = 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant[11] og N er antall gassmolekyler. La oss for enkelhets skyld sette $Nk = 1$ og skrive den ideelle gasslov slik:

$$T = f(p, V) = pV$$

I termodynamikk kalles nivåkurvene til T **isotermer** siden T er konstant på dem.

14 Skisser isotermene til den ideelle gasslov.

15 Nivåkurvene til trykk kalles **isobarer**. Hva er trykket på Steinkjer denne dagen?[12]



[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law
[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant
[12] https://www.met.no/vaer-og-klima/meteorologens-prognosekart

Vi har to uavhengige variable, og det er interessant å vite hvordan f endres med hensyn på begge. Derfor finnes det to deriverte. De er

$$\partial_{x_1} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} \qquad \text{og} \qquad \partial_{x_2} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2+h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

og uttales henholdsvis "f derivert med hensyn på x_1 og x_2". Å partiellderivere er enkelt; man finner $\partial_{x_1} f$ ved å betrakte x_2 som en konstant, og så derivere i vei med hensyn på x_1. Samme for x_2. Finn de partiellderiverte til

16 $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$. 17 $T(p, V) = pV$

De partiellderiverte angir stigningen i koordinatretningene. Står du i et punkt og peker skiene rett øst er stigningen gitt ved $\partial_{x_1} f$ og peker du dem rett nord er den gitt ved $\partial_{x_2} f$. Vi setter de partiellderiverte sammen i en radvektor som kalles **gradienten**:[13]

$$f' = \partial_x f = \left(\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f\right)$$

Evaluerer du denne i et punkt i x-planet, får du stigningen i koordinatretningene og dersom du vil ha stigningen i en bestemt retning, prikker du gradientvektoren med en enhetsvektor i retningen; dette kalles **retningsderivert**.[14] Tenk retningen til skiene på skitur.[15]

18 La oss finne den retningsderiverte til et plan. La $f(x) = ax_1 + bx_2 + c$ og

$$g(s) = \begin{pmatrix} x_1 + s\cos\theta \\ x_2 + s\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Finn stigningen ut fra x med hensyn på s i retningen indikert av θ.

Skjønner du retningsderivert og skalarproduktet, bør det være klart at gradienten også angir den bratteste retningen i terrenget, altså den retningen du må peke skiene hvis du skal gå rett oppover.

19 Finn gradientvektorene til funksjonene i oppgave 16 og 17.

20 Finn stigningen på fjellsiden $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ når du står i punktet $(1, 2)$ og skiene peker rett nordvest.

21 Vis at gradienten står normalt på nivåkurvene.



[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative

[15] Det sies at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Tøys og tull. Ski er visst en kinesisk oppfinnelse:
https://snl.no/ski
https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/
https://secretsoftheice.com/news/2021/10/05/the-best-preserved-pair-of-skis-from-prehistory/

Akkurat som det finnes en forvirrende palett av funksjonstyper fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ finnes det en forvirrende palett av integraler å stappe dem inn i. Husk at buelengden til kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ er

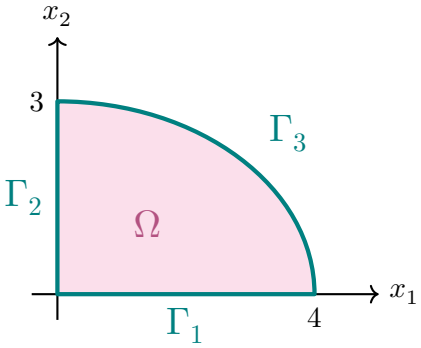
$$\int_\Gamma ds = \int_a^b |x'(t)| \, dt.$$

La f være et skalarfelt. Det enkleste flervariable integralet kalles **linjeintegralet til f over Γ**, og dersom Γ er parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, er det gitt som

$$\int_\Gamma f \, ds = \int_a^b f(x(t)) \, |x'(t)| \, dt.$$

Integralet kan tolkes på mange måter, men i begynnelsen bør du tenke på det som arealet til en husvegg der f er taket og Γ er husveggen slik den er tegnet i husets arealtegning.

22 Du har tenkt å bygge en stilig grillhytte med grunnflate Ω. Du har kjøpt gassgrill og vil derfor ha tak formet som den ideelle gasslov, løftet opp på fem meter vegg: $f(x) = 5 + x_1 x_2$. Du skal bestille panel og polykarbonat til veggene, og trenger derfor å regne ut veggens totale areal. Finn arealet.



Det er vanlig å kreve at x tegner Γ på monotont vis, for ellers blir arealet feil - parametriseringen x får ikke lov til å stoppe opp, snu og kjøre tilbake eller noe sånt. Den enkleste måten å få dette til på er å kreve at banefarten aldri er null.



En alternativ tolkning er at du har en brugde eller en djevlerokke som beiter pelagisk og svømmer langs kurven Γ. Dersom planktontettheten er gitt ved f, blir linjeintegralet brugdens totale måltid.

23 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Brugden svømmer mot klokken fra $(0,1)^T$ den lange veien rundt til $(1,0)^T$. Hvor mye spiser den?

24 Brugden svømmer så fra x_1-aksen tilbake til x_2-aksen langs den rette linjen $x_1 + x_2 = 1$. Planktontettheten er den samme. Hvor mye spiser den på denne turen?



Foto: Greg Skomal

Hvis du har to forskjellige parametriseringer for den samme kurven Γ, får linjeintegralet over Γ den samme verdien. Dette følger av kjerneregelen.

25 Den rette linjen i oppgaven over kan parametriseres på mange forskjellige måter. Regn ut integralet med to forskjellige parametriseringer og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den vanligste måten å introdusere linjeintegraler på, er å si at $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er massetetthet målt i kilo per meter og at Γ er en tråd med massetetthet f. Da blir linjeintegralet til f over Γ trådens totale masse. Denne tolkningen er litt teit, for om en tråd har varierende tetthet (tenk for eksempel på en gitarstreng spunnet med kobbertråd), er det ingen som tenker på denne tettheten som en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. La oss heller ta en brugdeoppgave til.

26 Det er dårlige tider i overflaten, og brugden må nedover i vannsøylen. Planktontettheten øker lineært med dybden og er gitt ved $f(x) = -x_3$, og brugden svømmer langs den sirkulære heliksen $x : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Hvor mye spiser brugden på denne turen?[16]



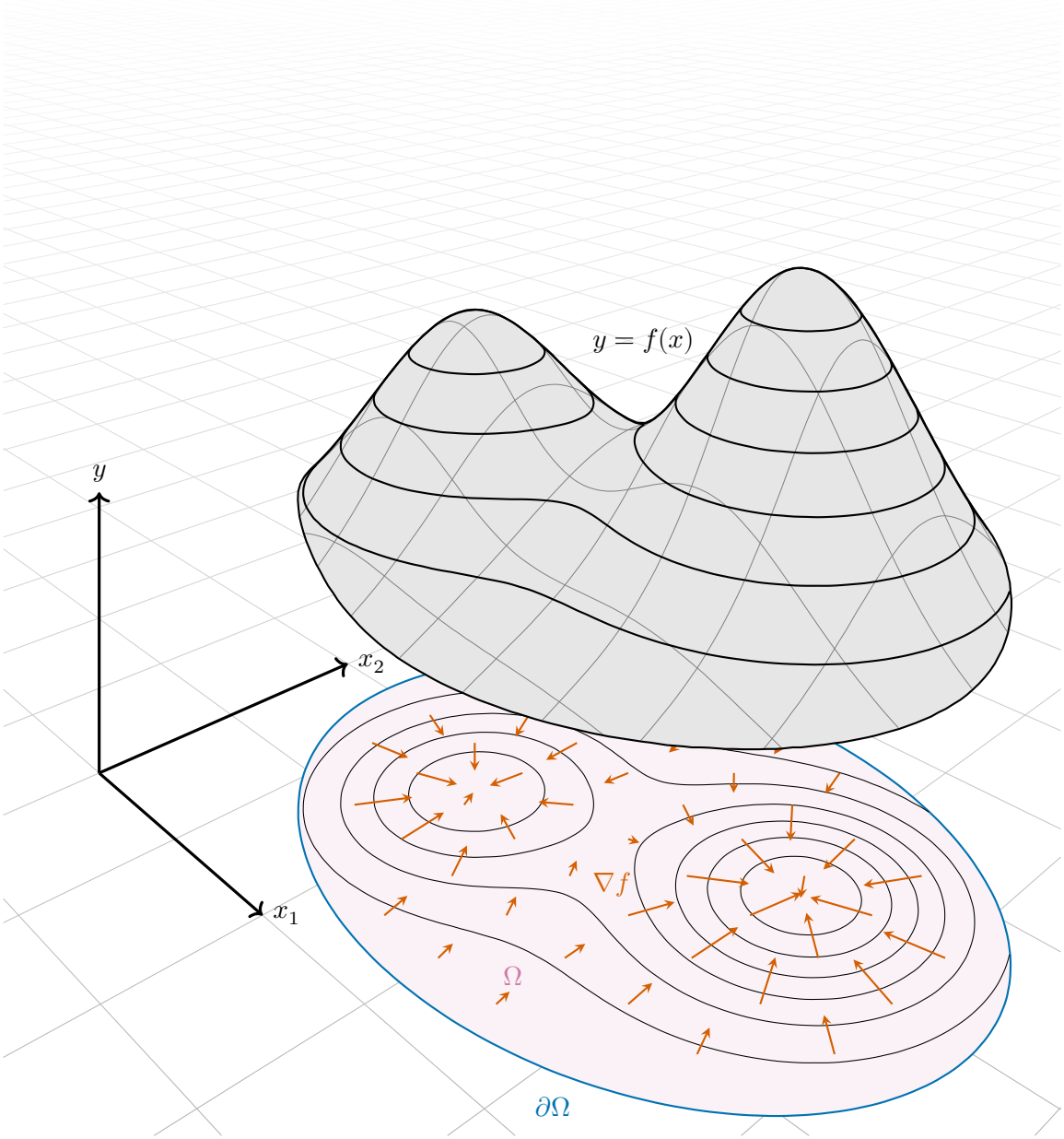
[16] Det sies at steinbiten (`https://en.wikipedia.org/wiki/Atlantic_wolffish`) ikke kan svømme rett oppover, men er nødt til å følge en sirkulær heliks om den skal opp i vannsøylen. Jeg vet ikke om dette er sant, men på fridykkerkurs lærer de visst at om man erter på deg en steinbit er det bare å svømme rett opp. Send meg en epost om du har ertet på deg en steinbit noen gang.

3 OM DØDSLENGSEL OG LANDEGRENSER

De fleste land har sitt høyeste punkt på toppen av et fjell. Men noen land, for eksempel Monaco og Finland, har sitt høyeste punkt i en oppoverbakke et eller annet sted på landegrensen. Kina og Nepal har på en måte begge deler, siden de deler Mount Everest. Her er litt notasjon. La Ω være en sammenhengende punktmengde i $\mathbb{R}^2$. Hvis en kurve Γ er randen til Ω, skriver vi

$$\partial\Omega = \Gamma,$$

tenk på Ω som landet og $\partial\Omega$ landegrensen. Grafen til $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er landets terreng, og det samme gjelder her - grafen kan ha maksima og minima inne på Ω eller et eller annet sted på $\partial\Omega$. Alt dette og litt til er sammenfattet i følgende figur:



Før vi går i gang, tror jeg vi skal innføre litt mer notasjon:

$$f' = \partial f = \nabla^T f$$

Det er av og til nyttig å kunne skrive gradienten som en søyle, og derfor finnes det et eget symbol for den transponerte av gradienten, nemlig **nablaoperatoren**:[17]

$$\nabla f = (f')^T.$$

Jeg liker best å reservere ∇f eller $\nabla^T f$ for romlig derivert og $\dot{f}$ for tidsderivert og så skrive ∂f eller f' for situasjoner der de uavhengige variable er all slags greier, inkludert rom, tid, trykk, volum eller andre ting. En av fordelene med å kunne skrive $f'(x)$ for radvektoren med de partiellderiverte, er at når x er en kolonnevektor, kan vi bare skrive

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

for **tangentplanet**[18] til f i a og

$$h'(t) = f'(x(t))x'(t)$$

for **kjerneregelen**[19] på $h(t) = f(x(t))$. Som du ser er disse formlene identiske med de du lærte på skolen - alt du trenger å huske er at produktene er erstattet med matriseprodukter.

27 En funksjon vi skal få bruk for om litt er den kvadratiske funksjonen $f(x) = x^T Ax$ der $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Finn f' og ∇f.

28 Hvis du skjønte tangentplanet og at om du står på toppen av et fjell, er stigningen null uansett hvilken retning du peker skiene, bør det være innlysende at om fjellet er deriverbart, må vi ha $f' = (0, 0)$ i topp, bunn og sadel. Finn toppunktet til fjellet gitt ved

$$f(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8.$$

29 Siden gradienten står normalt på nivåkurven, er tangentlinja til nivåkurven gjennom punktet a gitt ved

$$f'(a)\,(x - a) = 0.$$

Et fjell er gitt ved

$$f(x) = 4 - x_1^2 - 2x_2^2.$$

Finn tangentlinjen til nivåkurven i $a = (1, 1/2)^T$.

30 Vann renner rett nedover, altså i retningen $-\nabla f$ - skikjørere kaller dette å kjøre rett i fallinja. En regndråpe lander på fjellet fra oppgaven over i punktet $(1, 1/2)^T$ og følger fallinja, slik at

$$x'(t) = -\nabla f(x(t))\,.$$

Finn $x(t)$ og vis at dråpen renner langs parabelen $x_2 = x_1^2/2$. Hvor kommer dråpen fra hvis du følger banen baklengs, $t \to -\infty$?

31 Finn tangentplanene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \qquad \text{og} \qquad f_2(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3$$

i punktet $(1, 1)^T$. Tangentplanenes nullnivåkurver skjærer hverandre i ett punkt. Hvilket? Skisser nivåkurvene til funksjonene.

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Del
[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent#Plane
[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Chain_rule

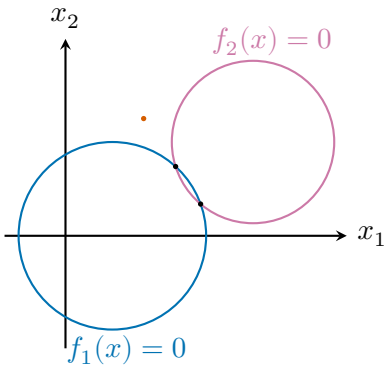
Har du skjønt tangentplanene, har du i prinsippet alt som trengs for å forstå **Newtons metode**[20]

$$x_{k+1} = x_k - \Big(f'(x_k)\Big)^{-1} f(x_k)$$

for løsning av det ikkelineære likningssettet

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Her betyr x_k iterasjon k, altså en vektor i $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Dette kan se litt forvirrende ut i starten, men boka til Nocedal og Wright[a] gjør det samme, så det er bare å venne seg til (kyb skal ha denne i optimering).



[a] https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-40065-5

32 Utled rekursjonen fra tangentplanformelen over.

33 I oppgave 31 regnet du ut et newtonsteg fra initialgjetningen $x_0 = (1,1)^T$ når du fant skjæringen mellom nullnivåkurvene til tangentplanene. Finn skjæringspunktene mellom sirklene.

34 Finn skjæringspunktene mellom de to ellipsene

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 = 1 \qquad \text{og} \qquad x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 = 1.$$

Newtons metode er en teknikk for å løse ikkelineære likningssett, men også en teknikk for å finne kritiske punkter til skalarfelt.[21]

35 Finn og klassifiser de kritiske punktene til

$$V(x) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2x_2^3 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2.$$

36 Fjellet i figuren på første side er gitt ved

$$f(x) = \frac{3}{5}\left(1 - x_1^2/4 - x_2^2/2\right) + 3e^{-2|x-a|^2} + 2e^{-2|x+a|^2}$$

der $a = (0.9, 0.3)^T$. Finn toppene og sadelpunktet.



[20] https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method#Multidimensional_formulations
[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method_in_optimization

Den generelle lineære regresjonsmodellen[22] skrives

$$Y = X\beta + \epsilon$$

der X er forklaringsvariabelen, Y er responsvariabelen, β er regresjonsparametrene som skal estimeres og ϵ usikkerheten. I TMA4106 så vi på hvordan normallikningene

$$X^T y = X^T X\beta$$

løses for å finne β når $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ og $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ er datamatriser.

37 Normallikningene dukker opp fordi vi leter etter minimumspunktet til

$$f(\beta) = (y - X\beta)^T(y - X\beta).$$

Utled dem ved å sette $f'(\beta) = 0$.

En funksjon av to variable har fire andrederiverte. Hvis du partiellderiverer to ganger med hensyn på én variabel, får du de **rene** annenordens partiellderiverte

$$\partial^2_{x_1} f \quad \text{og} \quad \partial^2_{x_2} f$$

og deriverer du med hensyn på én variabel og så med hensyn på den andre, får du de **blandede**

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} f \quad \text{og} \quad \partial_{x_2}\partial_{x_1} f.$$

38 Finn de dobbeltderiverte til fjellet i oppgave 28.

Det er vanlig å sette opp de andreordens deriverte i **hessematrisen**:[23]

$$\partial\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} f & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1} f & \partial^2_{x_2} f \end{pmatrix}$$

Denne er som regel symmetrisk, men ikke alltid - se oppgave 33 i økt 8.

39 Finn fram til Taylors andreordens formel for en funksjon fra $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h + \frac{1}{2}h^T f''(x)h$$

ved å sende en rett linje gjennom x i retning h og bruke kjerneregelen.

I hessematrisen finner vi info om hvorvidt et kritisk punkt er topp eller bunn.

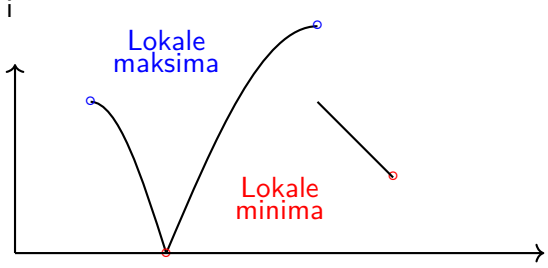
40 Forklar hvorfor vi nå trenger å vite om hessematrisen er positivt eller negativt definitt eller ingen av delene, og vis at fjellet i oppgave 28 har et toppunkt i $(10/7, 8/7)^T$.

41 Klassifiser det kritiske punktet til $f(\beta) = (y - X\beta)^T(y - X\beta)$ fra oppgave 37.

[22] https://en.wikipedia.org/wiki/General_linear_model
[23] https://en.wikipedia.org/wiki/Hessian_matrix

De kritiske punktene på forrige side er alle enten globale minima eller globale maksima. På gymnaset lærte du at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan ha maksima eller minima i

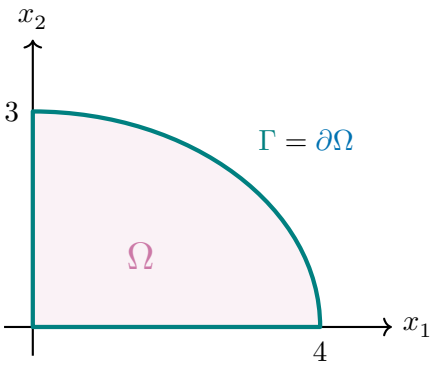
- kritiske punkter.
- punkter der f eller f' er diskontinuerlig.
- endepunktene i definisjonsmengden.



I flere dimensjoner er det litt mer komplisert, men grunnprinsippene er de samme. La oss vende tilbake til fjellet

$$f(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8.$$

42 La $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være området vi får ved å ta snittet av første kvadrant med en ellipse med halvakser 4 og 3, se figur. Du går en skitur på fjellet langs $\partial\Omega$ og ønsker å finne toppunktet på turen.
(Du kan for eksempel sette opp parametriseringer for alle de tre bitene av Γ og sjekke.)



43 La nå Ω være området på figuren over og f fjellfunksjonen. Hva er $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sitt globale maksimum og minimum?[24]

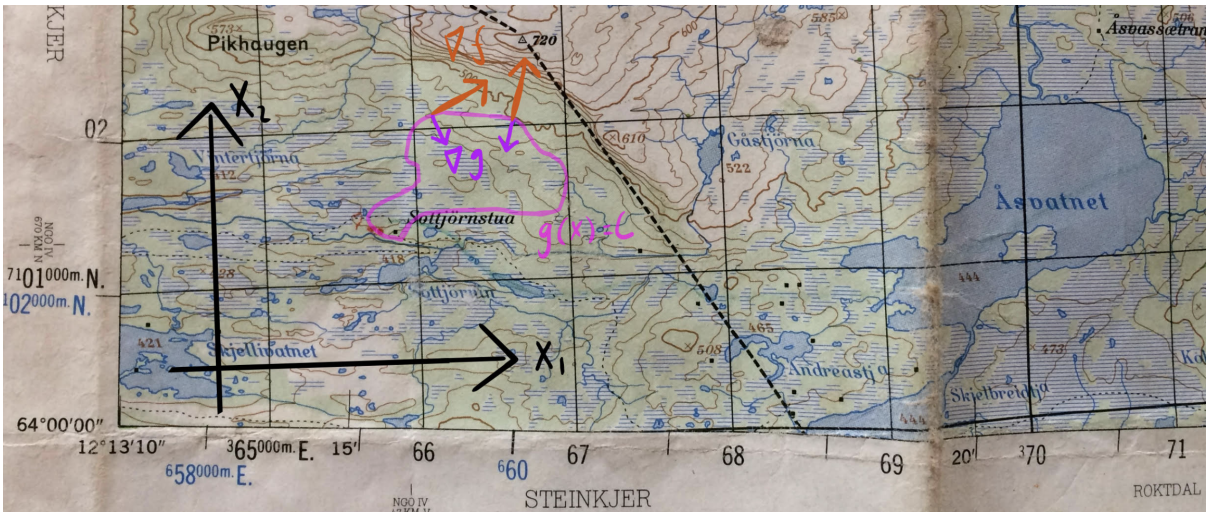


[24] Egentlig må vi nå være nøye på å skille mellom **åpne** og **lukkede** mengder. Mengden Ω er åpen dersom du kan slå en liten sirkelskive rundt hvert punkt i Ω og så er alle punkter i sirkelskiven inneholdt i Ω dersom radien er liten nok. I dette kurset er det nok å forstå den intuitive ideen - Ω er lukket dersom randkurven $\partial\Omega$ er en del av Ω og åpen dersom $\partial\Omega$ ikke er en del av Ω. Slår du en sirkelskive om et punkt på $\partial\Omega$ vil noe av skiven legge seg utenfor Ω uansett hvor liten radien er.

Dersom du skal finne lokale maksima og minima til en deriverbar funksjon må du altså lete på $\partial\Omega$ i tillegg til å lete opp de kritiske punktene til funksjonen. På forrige side parametriserte du antagelig bitene av $\partial\Omega$, men det finnes en annen teknikk som kalles **Lagranges multiplikatormetode**.[25] La oss si at du går på fjellet gitt av f og at gps-sporet ditt er gitt av en kurve med likning $g(x) = c$. Figuren under viser trajektorien til en sliten universitetslektor på orrfugljakt. Ekvidistanselinjene på kartet er de brune nivåkurvene til f, og han går en tur gitt av den rosa kurven.

44 Forklar ved hjelp av figuren at for det høyeste punktet på turen, bør gradientene til f og g være parallelle, og at dersom nivåkurvene er glatte, finnes det i dette punktet en konstant λ slik at

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$$



45 Hvorfor er dette det samme som å lete etter kritiske punkter til

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda\,(g(x) - c)\,?$$

Prøv oppgave 42 på nytt med Lagranges multiplikatormetode.

46 Du går på elliptisk skitur på fjellet $h(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$, langs trajektorien gitt ved ellipsen med likning $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$. Finn turens høyeste punkt.

47 En ellipse med halvakser $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene, tilfredsstiller likningen

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3.$$

Finn den største verdien til $f(x) = x_1 + 2x_2$ på ellipsen.

[25] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier