1 PARAMETRISERTE KURVER

1 Vi tar utgangspunkt i parametriseringen for enhetssirkelen

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Å justere radien til noe annet enn 1 er bare å gange hele greia med radien, og sentrum flytter vi ved å legge til en konstant vektor. Sirklene har likninger

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \qquad \text{og} \qquad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3 = 0$$

så parametriseringene blir

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

og

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{3}\cos\theta \\ 2 + \sqrt{3}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

2 Parametriseringen

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$$

passer i ellipselikningen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

3 En ellipse har parametrisering

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix},$$

så hvis vi setter sammen

$$y(\theta) = R(\alpha)x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix},$$

så er vi der. For $\alpha = \pi/4$ får vi

$$y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\cos\theta + b\sin\theta \end{pmatrix}.$$

4 For sirkelen med radius 2 er

$$\dot{x}(\theta) = 2\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad |\dot{x}(\theta)| = 2,$$

og for den med radius $\sqrt{3}$ blir banefarten på samme vis $\sqrt{3}$ - konstant fart, som seg hør og bør på en sirkel. For ellipsen er

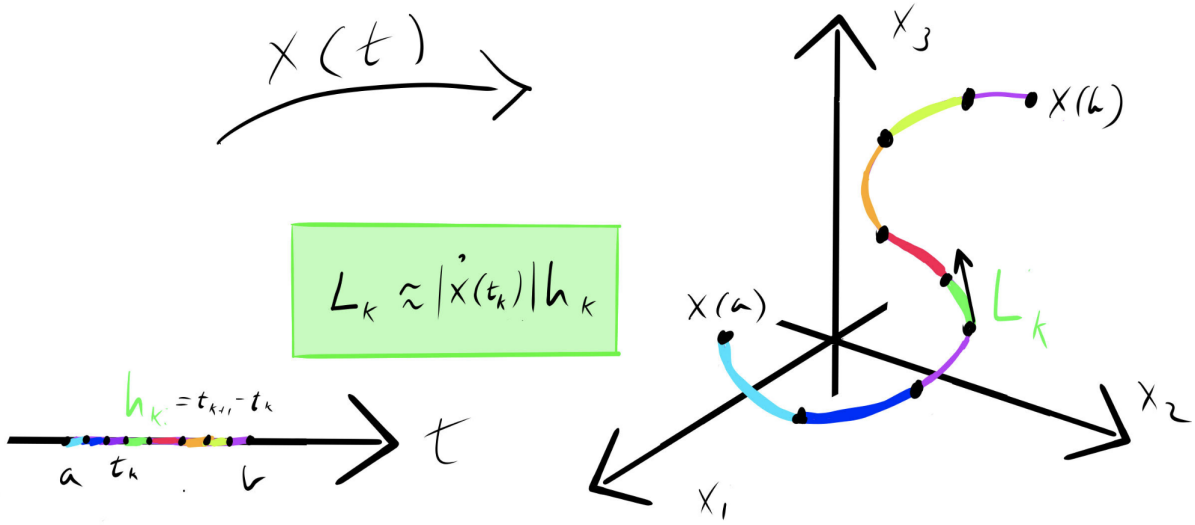
$$\dot{x}(\theta) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad |\dot{x}(\theta)| = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$

så på ellipsen varierer farten: størst der kurven er slakkest og minst i de spisse endene. Den roterte ellipsen har tangent $\dot{y}(\theta) = R(\pi/4)\dot{x}(\theta)$ og nøyaktig samme banefart - rotasjonsmatrisen er ortogonal, og i forrige økt viste vi at ortogonale matriser ikke endrer lengder.

5 Formelen

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$$

er en definisjon. Figuren motiverer den:



Her er intervallet $[a, b]$ på t-aksen partisjonert i n korte linjestykker med lengde h_k. De korresponderende krumme lengdene i x-koordinatsystemet heter L_k, se fargekodene. Buelengden er

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\dot{x}(t_k)|\, h_k,$$

og vi har god tro på at uttrykket på høyre side blir en bedre approksimasjon etter hvert som partisjonen gjøres finere. Men uttrykket til høyre er en venstre riemannsum for funksjonen $|\dot{x}(t)|$, så når partisjonen blir finere, går denne summen mot

$$\int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt.$$

Funksjonen $x : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan t \end{pmatrix}$$

er spesielt designet til NTH av en ekspert på å konstruere parametriserte kurver man kan beregne buelengden til. Vi finner først tangenten

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+t^2}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

og buelengden

$$\int_0^2 |\dot{x}(t)|\, dt = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = 2\sinh^{-1}(2) = 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \approx 2.887.$$

6 Vi finner tangenten:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

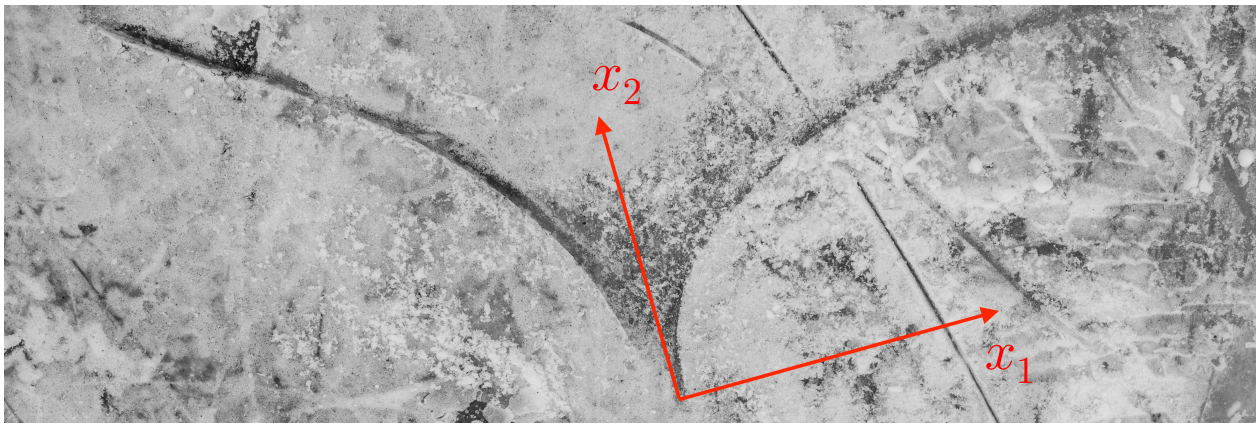
og buelengden:

$$\int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt = \sqrt{2}\int_a^b dt = \sqrt{2}(b-a).$$

For buelengdeparametrisering må vi ha et startpunkt, så la oss sette $a = 0$ og $b = t$. Buelengden er i så fall $s = \sqrt{2}t$, så om vi setter inn $t = s/\sqrt{2}$ i den opprinnelige parametriseringen, får vi buelengdeparametriseringen

$$x(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(s/\sqrt{2}\right) \\ \sin\left(s/\sqrt{2}\right) \\ s/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7 Den ser faktisk omtrent sånn ut. Ihvertfall nesten. Om jeg skulle tegna den i forelesning, ville det ikke blitt mer nøyaktig.



8 Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

og enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} \begin{pmatrix} 3t^2/|t| \\ 2t/|t| \end{pmatrix}.$$

Når $t \to 0$ er

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{9t^2+4}} = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{|t|} = 0,$$

men

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = -1,$$

slik at

$$\lim_{t\to 0^+} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \lim_{t\to 0^-} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Går du inn mot origo på den negative siden av $t = 0$, peker enhetstangenten rett ned, men går du utover fra origo på den positive siden, peker den plutselig rett opp istedet. Den snur momentant 180 grader i $t = 0$ fordi kurven stopper opp og begynner å kjøre motsatt vei.

9 Denne ser ut som parabelen $x_2 = x_1^2$ - bare plott i python og se. Banefarten er null i origo her også, men enhetstangenten går mot $(1, 0)^T$ fra begge sider, så kurven er glatt. Betingelsen $|\dot{x}(t)| \neq 0$ er tilstrekkelig, ikke nødvendig.

10 Noen har skøytet inn mot punktet, bremset helt opp og satt fart i en ny retning. I vendepunktet var banefarten null, og da kan sporet få en kusp - akkurat som kurven i oppgave 7. Et skjær i fart klarer bare glatte kurver.

2 SKALARFELT

11 Nivåkurvene er gitt ved

$$c = x_1 + 2x_2$$

for forskjellige verdier av c. Dette er parallelle rette linjer med normalvektor $(1, 2)$.

12 Nivåkurvene er ellipsene

$$4x_1^2 + 5x_2^2 = c$$

med halvakser $\sqrt{c}/2$ langs x_1-aksen og $\sqrt{c/5}$ langs x_2-aksen, for $c > 0$. For $c = 0$ består nivåkurven bare av origo, og for $c < 0$ er den tom.

13 Vi fullfører kvadratene:

$$4x_1^2 + 8x_1 + 5x_2^2 - 10x_2 + 9 = 4\left(x_1 + 1\right)^2 + 5\left(x_2 - 1\right)^2.$$

Det er de samme ellipsene som i forrige oppgave, bare med sentrum i $(-1, 1)$.

14 Isotermene $pV = c$ er hyperbler i første kvadrant.

15 Lavtrykkssenteret ligger rett utenfor Trøndelagskysten, og Steinkjer ligger omtrent på den innerste isobaren: om lag 975 hPa.

16 Vi deriverer med hensyn på en variabel av gangen:

$$\partial_{x_1} f = 2x_1 + x_2 + 1 \qquad \text{og} \qquad \partial_{x_2} f = x_1 + 2x_2 + 1.$$

17

$$\partial_p T = V \qquad \text{og} \qquad \partial_V T = p.$$

18 Vi setter g inn i f og får den envariable funksjonen

$$f(g(s)) = a(x_1 + s\cos\theta) + b(x_2 + s\sin\theta) + c$$

så kjerneregelen du lærte på skolen gir oss at vi får indreproduktet mellom gradienten og retningen:

$$\frac{d}{ds} f(g(s)) = a\cos\theta + b\sin\theta = (a, b)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

Tenk på retningen $(\cos\theta, \sin\theta)^T$ som en dimensjonsløs ting du ganger med s for å få en vektor i $\mathbb{R}^2$.

19

$$\partial_x f = (2x_1 + x_2 + 1,\ x_1 + 2x_2 + 1) \qquad \text{og} \qquad (\partial_p T,\ \partial_V T) = (V,\ p)\,.$$

20 Gradienten i punktet er

$$\partial_x f(1, 2) = (5, 6)\,.$$

Nordvest er retningen

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix},$$

så stigningen er

$$\partial_x f(1, 2)\ e = \frac{-5 + 6}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

21 Langs en nivåkurve er høyden konstant, så den retningsderiverte i kurvens tangentretning er null:

$$\partial_x f\, e = 0$$

for enhetstangenten e. Skalarproduktet er null nøyaktig når vektorene står vinkelrett på hverandre, så gradienten står normalt på nivåkurven. Rett utfor er motsatt av rett oppover: du peker skiene motsatt av gradienten, og stigningen er $-|\partial_x f|$.

22 Fra tegningen leser vi at grunnflaten Ω er kvartellipsen med halvakser 4 og 3 i første kvadrant, med den rette veggen Γ_1 langs x_1-aksen, den rette veggen Γ_2 langs x_2-aksen og den krumme veggen Γ_3 langs ellipsebuen. Langs begge aksene er $x_1 x_2 = 0$, så der er taket $f(x) = 5$ og de rette veggene er rektangler:

$$\int_{\Gamma_1} f\, ds = 5 \cdot 4 = 20 \qquad \text{og} \qquad \int_{\Gamma_2} f\, ds = 5 \cdot 3 = 15.$$

Den krumme veggen Γ_3 parametriserer vi med

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \le \theta \le \pi/2,$$

som har banefart $|\dot{x}(\theta)| = \sqrt{16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}$, og får

$$\int_{\Gamma_3} f\, ds = \int_0^{\pi/2} (5 + 12\cos\theta\sin\theta)\, \sqrt{16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta.$$

Femmeren gir $5L$, der

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta \approx 5.53$$

er buelengden til kvartellipsen. Dette integralet finnes det ingen formel for - omkretsen av en ellipse er et såkalt elliptisk integral, og det er derfor den ikke står i formelsamlingen sammen med omkretsen av en sirkel - så L må regnes ut numerisk. Resten går derimot fint for hånd: substitusjonen $u = 16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta = 9 + 7\sin^2\theta$ gir $du = 14\sin\theta\cos\theta\, d\theta$, så

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 12\cos\theta\sin\theta\, \sqrt{16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta &= \frac{6}{7}\int_9^{16} \sqrt{u}\, du = \frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}\left(16^{3/2} - 9^{3/2}\right) \\ &= \frac{4}{7}\left(64 - 27\right) = \frac{148}{7} \approx 21.1.\end{aligned}$$

Til sammen blir veggarealet

$$\int_\Gamma f\, ds = 20 + 15 + 5L + \frac{148}{7} \approx 35 + 27.6 + 21.1 = 83.8.$$

Du får bestille litt under åttifire kvadratmeter panel og polykarbonat.

23 Brugdens trajektorie Γ er parametrisert ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

der $\pi/2 \le t \le 2\pi$. Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\, ds &= \int_{\pi/2}^{2\pi} f(x(t))|\dot{x}(t)|\, dt \\ &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (1 + \cos t\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi} 2 + \sin(2t)\, dt = \frac{1}{2}\left(3\pi - 1\right).\end{aligned}$$

Brugden spiser altså $\frac{1}{2}(3\pi - 1)$ plankton på sin tur fra x_2-aksen til x_1-aksen. Ordet "plankton" er avledet fra det greske ordet for "å drive", så plankton er en fellesbetegnelse for levende ting i havet som ikke kan svømme horisontalt. Noen typer plankton kan svømme vertikalt, og det er mye som er plankton som man ikke tenker på som plankton.[1]

24 Vi må først parametrisere den rette linjen. Dette kan gjøres på mange måter, men for eksempel $x : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Linjeintegralet blir

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^1 (1 + (1-t)t)\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

25 Vi kan prøve $x : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Denne kurven reiser også fra $(1,0)^T$ til $(0,1)^T$, men med varierende fart (først sakte og så fortere). Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f\, ds &= \int_0^1 (1 + (1-t^2)t^2)\sqrt{(-2t)^2 + (2t)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 (1 + t^2 - t^4)\, 2\sqrt{2}t\, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

26 Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f\, ds &= \int_0^{4\pi} -(-t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{4\pi} t\, dt = 8\pi^2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3 OM DØDSLENGSEL OG LANDEGRENSER

27 Vi skriver ut

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})\, x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

som har gradient

$$f'(x) = (2a_{11}x_1 + (a_{12} + a_{21})\, x_2, (a_{12} + a_{21})\, x_1 + 2a_{22}x_2)\,.$$

Dette er det samme som

$$f'(x) = x^T (A + A^T)\,,$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Plankton

siden

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21} + a_{12} \\ a_{12} + a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}.$$

Transponerer vi, får vi

$$\nabla f = (A + A^T)\, x.$$

Vi kan alltid skrive

$$A = \frac{1}{2}\,(A + A^T) + \frac{1}{2}\,(A - A^T)\,,$$

og $\frac{1}{2}\,(A + A^T)$ kalles den **symmetriske delen** av A, mens $\frac{1}{2}\,(A - A^T)$ kalles den **skjevsymmetriske delen**. Den skjevsymmetriske delen bidrar ikke til $x^T Ax$, så er A symmetrisk, blir $\nabla f = 2Ax$ - akkurat som den deriverte av ax^2 er $2ax$.

28 Vi setter gradienten lik null:

$$f'(x) = (-2x_1 - x_2 + 4, -x_1 - 4x_2 + 6) = (0, 0).$$

Dette er likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= 6, \end{aligned}$$

som har løsningen $x_1 = 10/7$ og $x_2 = 8/7$. Høyden er $f(10/7, 8/7) = 100/7$. At dette faktisk er en topp og ikke en bunn eller en sadel, viser vi i oppgave 40.

29 Høyden i a er $f(1, 1/2) = 4 - 1 - 1/2 = 5/2$. Vi har $f'(x) = (-2x_1, -4x_2)$, så $f'(a) = (-2, -2)$, og tangentlinja blir

$$-2\,(x_1 - 1) - 2\,\big(x_2 - \tfrac{1}{2}\big) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 + x_2 = \tfrac{3}{2}.$$

30 Med $-\nabla f(x) = (2x_1, 4x_2)^T$ er likningssystemet

$$x_1' = 2x_1, \qquad x_2' = 4x_2,$$

og de to likningene har ingenting med hverandre å gjøre. Med startpunktet $(1, 1/2)^T$ blir

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix},$$

og siden $e^{4t} = \left(e^{2t}\right)^2$, er $x_2 = x_1^2/2$. Når $t \to -\infty$, går $x(t) \to 0$, så dråpen kommer fra toppen. Starter du i $(a, b)^T$, får du $x_2 = (b/a^2)\, x_1^2$. Fallinjene er altså parablene $x_2 = Cx_1^2$ og koordinataksene. Alle starter på toppen, og alle krysser nivåkurvene vinkelrett.

31 Gradientene er

$$f_1'(x) = \Big(2(x_1 - 1), 2x_2\Big) \qquad \text{og} \qquad f_2'(x) = \Big(2(x_1 - 4), 2(x_2 - 2)\Big)$$

slik at

$$f_1'(1, 1) = (0, 2) \qquad \text{og} \qquad f_2'(1, 1) = (-6, -2)$$

Tangentplanene blir

$$p_1(s) = -3 + (0,2)\begin{pmatrix} s_1 - 1 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = -3 + 2(s_2 - 1)$$

og

$$p_2(s) = 7 - (6,2)\begin{pmatrix} s_1 - 1 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = 7 - 6(s_1 - 1) - 2(s_2 - 1).$$

Nullnivåkurvene skjærer hverandre i punktet s som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} 2(s_2 - 1) &= 3 \\ 6(s_1 - 1) + 2(s_2 - 1) &= 7, \end{aligned}$$

altså $s = (5/3, 5/2)^T$.

Nivåkurvene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4$$

tilfredsstiller

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = C$$

og er sirkler med radius $\sqrt{4 + C}$ med sentrum i $(1, 0)^T$. Nivåkurvene til f_2 er på samme vis sirkler med radius $\sqrt{3 + C}$ og sentrum i $(4, 2)^T$.

32 Newtons idé er å bytte ut f med tangentplanet i punktet du står i, og løse det lineære problemet istedenfor det ikkelineære. Tangentplanet i x_k er

$$p(s) = f(x_k) + f'(x_k)(s - x_k),$$

og vi setter det lik null og løser for s:

$$f'(x_k)(s - x_k) = -f(x_k) \qquad \Longrightarrow \qquad s = x_k - \Big(f'(x_k)\Big)^{-1} f(x_k).$$

Punktet s er neste gjetning, og det er rekursjonen.

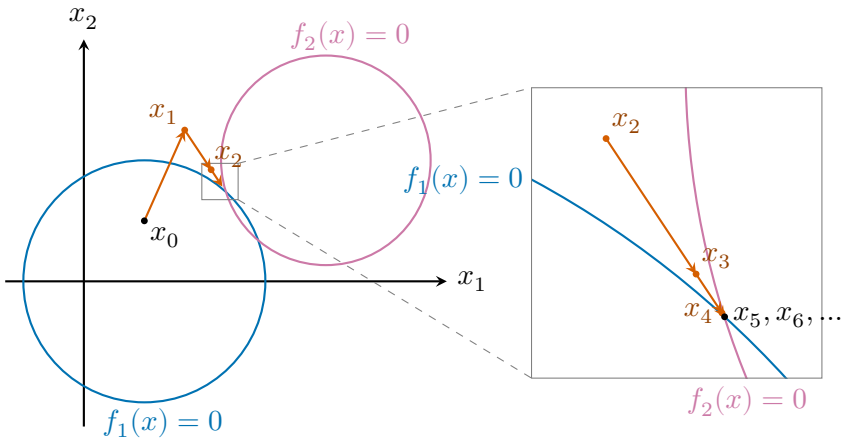
33 Vi itererer

$$x_{k+1} = x_k - \Big(f'(x_k)\Big)^{-1} f(x_k) \qquad \text{med} \qquad f'(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) & 2x_2 \\ 2(x_1 - 4) & 2(x_2 - 2) \end{pmatrix}$$

fra $x_0 = (1, 1)^T$. Første steg gir $x_1 = (5/3, 5/2)^T$ - nøyaktig skjæringspunktet mellom nullnivåkurvene til tangentplanene fra oppgave 31, slik oppgaveteksten lovet. Deretter går det fort:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 2.1036... \\ 1.8445... \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 2.2901... \\ 1.5648... \end{pmatrix} \qquad x_4 = \begin{pmatrix} 2.3436... \\ 1.4845... \end{pmatrix} \qquad x_5 = \begin{pmatrix} 2.3488... \\ 1.4767... \end{pmatrix}$$

og der står det snart bom stille. Figuren viser hvordan iteratene hopper mot skjæringspunktet, og til høyre et utsnitt forstørret åtte ganger:



Programmet ligger her:
`https://mortano.folk.ntnu.no/rust/newton/`
Det løser $f'(x_k)s = -f(x_k)$ for steget s og setter $x_{k+1} = x_k + s$. Sirklene skjærer hverandre i to punkter, og likningssystemet kan faktisk løses eksakt:

$$x = \begin{pmatrix} \left(34 \mp 2\sqrt{3}\right)/13 \\ \left(14 \pm 3\sqrt{3}\right)/13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.349 \\ 1.477 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 2.882 \\ 0.677 \end{pmatrix}.$$

Fra $(1,1)^T$ finner Newton det første av dem. Vil du ha det andre, må du starte gjetningen et annet sted.

34 Samme oppskrift. Med

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 - 1 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

er jacobimatrisen

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 - 2 & 2x_1 + 2x_2 - 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 1 & 2x_1 + 12x_2 - 2 \end{pmatrix},$$

og newtoniterasjonen finner ett skjæringspunkt per startgjetning. Vi mater programmet fra forrige oppgave med f og f' og kjører det fra alle punktene i et 7×7-rutenett med maskevidde $1/2$ om origo, og kaster løsninger vi har sett før. Ellipsene skjærer hverandre i fire punkter:

$$\begin{pmatrix} 0.850 \\ 0.459 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1.071 \\ -0.404 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.248 \\ -0.190 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.516 \\ 0.569 \end{pmatrix}.$$

Hvilket av dem du lander i, avhenger av hvor du starter.

35 Kritiske punkter er løsningene av $\nabla V = 0$, altså

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} V &= 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ \partial_{x_2} V &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Det er nøyaktig de to ellipsene fra forrige oppgave, så de kritiske punktene er de fire skjæringspunktene vi allerede har funnet med Newton. Hessematrisen er jacobimatrisen til ∇V,

$$V''(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 - 2 & 2x_1 + 2x_2 - 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 1 & 2x_1 + 12x_2 - 2 \end{pmatrix},$$

som også er matrisen vi inverterte i newtoniterasjonen. Egenverdiene til en symmetrisk 2×2-matrise er røttene i $\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$, så de trenger heller ikke noe bibliotek. Egenverdiene i de fire punktene gir klassifiseringen:

punkt	V	egenverdier	
$(0.850, 0.459)^T$	-1.31	2.9 og 6.3	bunn
$(-0.248, -0.190)^T$	0.24	-6.3 og -2.4	topp
$(1.071, -0.404)^T$	-0.74	-4.7 og 3.6	sadel
$(-0.516, 0.569)^T$	-0.13	-4.1 og 3.9	sadel

Toppen og bunnen er bare lokale - V er et tredjegradspolynom og går mot $\pm\infty$ langs x_1-aksen. Å lete etter kritiske punkter med Newton på ∇V er det samme som å bytte ut V med sitt eget andreordens taylorpolynom i hvert steg og hoppe til toppen eller bunnen av den parabolen.

36 Gradienten er

$$f'(x) = -\frac{3}{10}(x_1, 2x_2) - 12e^{-2|x-a|^2}(x-a)^T - 8e^{-2|x+a|^2}(x+a)^T,$$

og $f'(x) = 0$ kan ikke løses med penn og papir. Figuren forteller oss likevel omtrent hvor vi skal lete, så vi starter en numerisk likningsløser i nærheten av a, $-a$ og origo. Det er Newtons metode fra oppgave 32 på likningen $\nabla f(x) = 0$, og da trenger Newton jacobimatrisen til ∇f, altså hessematrisen. Siden gradienten til $e^{-2|x-a|^2}$ er $-4e^{-2|x-a|^2}(x-a)$, blir

$$f''(x) = -\frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 12e^{-2|x-a|^2}\left(I - 4(x-a)(x-a)^T\right) - 8e^{-2|x+a|^2}\left(I - 4(x+a)(x+a)^T\right).$$

Dette er også med i programmet fra oppgave 33. Vi får

	punkt	høyde
høy topp	$(0.877, 0.285)^T$	3.46
lav topp	$(-0.865, -0.278)^T$	2.46
sadel	$(-0.074, -0.023)^T$	1.40

Hessematrisen har egenverdiene -12.6 og -12.2 på den høye toppen, -8.6 og -8.1 på den lave, og -3.8 og 7.9 i sadelen - to negative i toppene og én av hvert fortegn i sadelen, se oppgave 40.

37 Vi ganger ut:

$$f(\beta) = y^T y - 2y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta.$$

Det første leddet er konstant, det andre er lineært i β med derivert $-2y^T X$, og skriver vi ut komponentene, ser vi at $(\beta^T A\beta)' = \beta^T(A + A^T)$ (det er oppgave 27). Siden $X^T X$ er symmetrisk, får vi

$$f'(\beta) = -2y^T X + 2\beta^T X^T X.$$

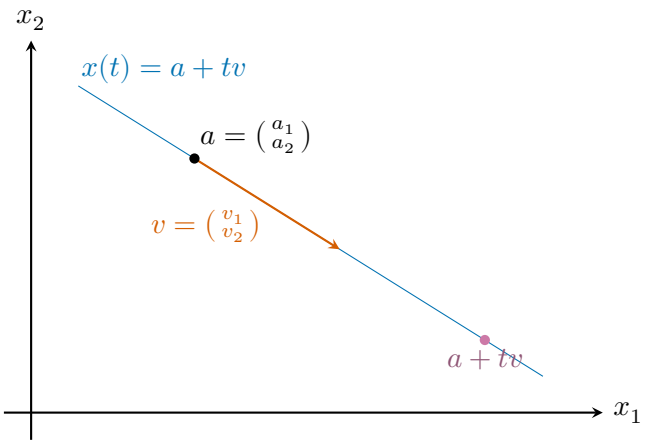
Setter vi denne lik null og transponerer, står normallikningene der:

$$X^T X\beta = X^T y.$$

38 Vi har $f'(x) = (-2x_1 - x_2 + 4, -x_1 - 4x_2 + 6)$, så

$$\partial_{x_1}^2 f = -2, \qquad \partial_{x_2}^2 f = -4, \qquad \partial_{x_1}\partial_{x_2} f = \partial_{x_2}\partial_{x_1} f = -1.$$

39 La oss sende en rett linje gjennom punktet a slik:



Parametriseringen for den rette linjen er

$$x(t) = a + tv = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

La oss definere

$$g(t) = f(x(t)) = f(a + tv)$$

og så bruke kjerneregelen på g, og få

$$\begin{aligned} g'(t) =& f'(x(t))x'(t) \\ =& f'(a + tv)v \\ =& \left(\partial_{x_1} f(a + tv), \partial_{x_2} f(a + tv)\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ =& v_1 \partial_{x_1} f(a + tv) + v_2 \partial_{x_2} f(a + tv). \end{aligned}$$

Kjerneregelen en gang til gir

$$\begin{aligned} g''(t) =& v_1 \frac{d}{dt}\left(\partial_{x_1} f(a + tv)\right) + v_2 \frac{d}{dt}\left(\partial_{x_2} f(a + tv)\right) \\ =& v_1 \left(v_1 \partial_{x_1}^2 f(a + tv) + v_2 \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(a + tv)\right) + v_2 \left(v_1 \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(a + tv) + v_2 \partial_{x_2}^2 f(a + tv)\right) \end{aligned}$$

Hvis du nå skriver ut

$$\begin{aligned} v^T A v =& \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ =& v_1^2 a_{11} + v_1 v_2 a_{12} + v_1 v_2 a_{21} + v_2^2 a_{22}, \end{aligned}$$

ser du at vi kan skrive

$$g''(t) = v^T f''(a + tv) v.$$

Vi kan nå taylorutvikle g:

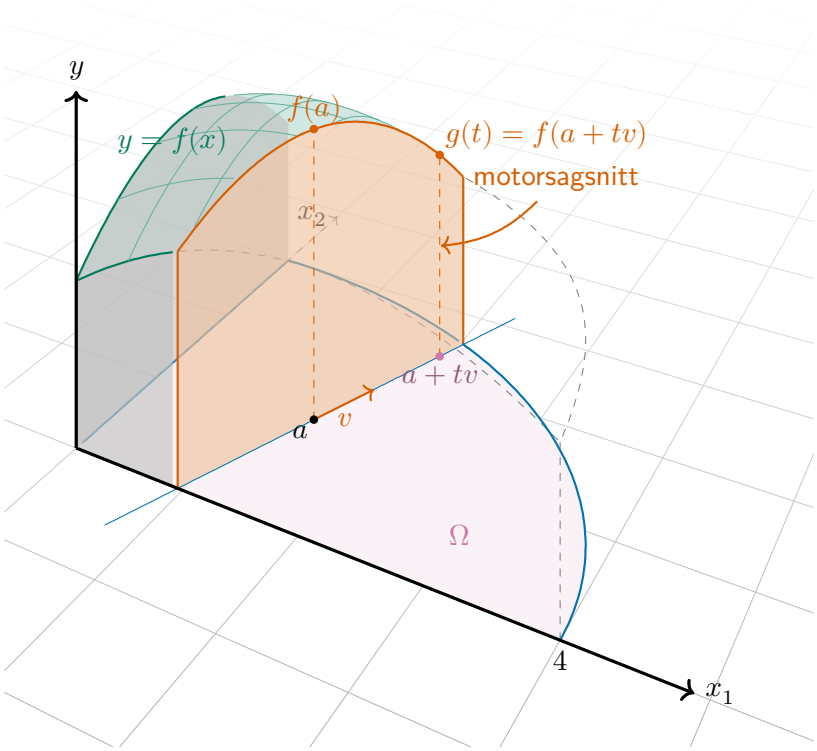
$$\begin{aligned} g(t) =& g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \cdots \\ =& f(a) + (f'(a)\,v)\,t + (v^T f''(a)\,v)\,\frac{t^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

Med $a = x$, $v = h$ og $t = 1$ er dette formelen i oppgaven. Merk ellers at

$$g'(0) = f'(a)v$$

som vi kjenner igjen som den retningsderiverte til f i a.

40 La a være et av f sine kritiske punkt. Vi tar en motorsag og snitter flaten til $f(x)$ langs den parametriserte linjen $a + tv$, og så taylorutvikler vi motorsagsnittfunksjonen $g(t) = f(a + tv)$ om $t = 0$, slik som i forrige oppgave.



Siden $f'(a) = 0$ dersom a er et kritisk punkt, blir taylorutviklingen

$$f(a + tv) = f(a) + (v^T f''(a)\,v)\,\frac{t^2}{2} + \cdots$$

Dersom t er bitteliten og f oppfører seg bra nok til at $(v^T f''(a)\,v)\,\frac{t^2}{2}$ fullstendig dominerer alle leddene som kommer etter, kan vi nå konkludere med følgende tabell. La λ_1 og λ_2 være egenverdiene til $f''(a)$.

- Dersom λ_1 og λ_2 er positive, er a et bunnpunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 er negative, er a et toppunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 har forskjellig fortegn, er a et sadelpunkt.

- Dersom en av dem er null, gir testen ingen konklusjon.

Hvordan kan vi være så freidige? Siden

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f$$

for alle funksjoner du kommer til å plages med,[2] er $f''(a)$ symmetrisk, og følgelig ortogonalt diagonaliserbar. La u_1 og u_2 være ortogonale egenvektorer til $f''(a)$. Disse utgjør en basis for $\mathbb{R}^2$, så vi kan alltid skrive

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

og regne ut den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} v^T f''(a)\, v &= (c_1 u_1 + c_2 u_2)^T f''(a)\,(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= (c_1 u_1 + c_2 u_2)^T (\lambda_1 c_1 u_1 + \lambda_2 c_2 u_2) \\ &= \lambda_1 c_1^2 |u_1|^2 + \lambda_2 c_2^2 |u_2|^2 \end{aligned}$$

I det første tilfellet er dette positivt for alle $v \neq 0$, så f vokser i alle retninger ut fra a. Samme resonnement dersom egenverdiene er negative. Dersom egenverdiene har forskjellig fortegn, kan vi bruke samme resonnement på $v = u_1$ og $v = u_2$ og konkludere med at det finnes en retning der vi går nedover og en retning der vi går oppover, slik at a er en sadel. Hvis en av egenverdiene er null, finnes det en retning der $v^T f''(a)\, v = 0$, og i så fall trenger vi flere ledd i taylorrekken for å konkludere.

Dersom alle egenverdier er positive, sier vi at matrisen er positivt definitt. Tilsvarende for negative egenverdier.

Hessematrisen til fjellet i oppgave 28 er

$$f''(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

som har karakteristisk polynom

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(4+\lambda) - 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 7$$

og egenverdier

$$\lambda = -3 \pm \sqrt{2}$$

som begge er negative. Følgelig er $(10/7, 8/7)^T$ en fjelltopp og ikke en dalbunn.

41 Fra oppgave 37 har vi $f'(\beta) = -2y^T X + 2\beta^T X^T X$, så hessematrisen er

$$f''(\beta) = 2X^T X.$$

For $v \neq 0$ er $v^T X^T X v = |Xv|^2$, og dette er positivt dersom X har full rang, for da er $Xv \neq 0$. Hessematrisen er altså positivt definitt, og det kritiske punktet er et minimum.

[2] Det finnes patologiske unntak, slik som for eksempel $\frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$, der de blandede andreordens partiellderiverte ikke er like, men disse er konstruert av matematikere for å krangle med folk som er uforsiktige nok til å påstå at de blandede andreordens partiellderiverte alltid er like. Se oppgave 33 i økt 8.

42 Du må lete etter maksima og minima til de tre envariable funksjonene

$$f(x_1, 0) = -x_1^2 + 4x_1 + 8 \qquad x_1 \in [0, 4]$$

$$f(0, x_2) = -2x_2^2 + 6x_2 + 8 \qquad x_2 \in [0, 3]$$

$$f(4\cos\theta, 3\sin\theta) = \\ -16\cos^2\theta - 12\cos\theta\sin\theta - 18\sin^2\theta + 16\cos\theta + 18\sin\theta + 8 \qquad \theta \in [0, \pi/2]$$

De to første er parabler med toppunkt i $x_1 = 2$ og $x_2 = 3/2$, der høyden er henholdsvis 12 og $25/2$. Den siste er uhåndterlig med penn og papir, men setter vi den deriverte lik null numerisk, finner vi et maksimum på 9.16 i $\theta \approx 28.2^\circ$, altså i punktet $(3.53, 1.42)^T$. Turens høyeste punkt er derfor $(0, 3/2)^T$ på x_2-aksen, med høyde $25/2$.

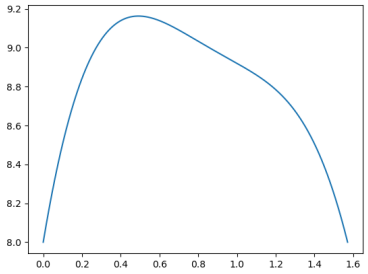
43 Siden f er et andreordens polynom, kan vi skrive

$$f(a + tv) = f(a) + \left(v^T f''(a)\, v\right) \frac{t^2}{2},$$

der $a = (10/7, 8/7)^T$ er det kritiske punktet, og siden $f''(a)$ er negativt definitt, vil funksjonsverdien i et tilfeldig punkt i $\mathbb{R}^2$ være funksjonsverdien i det kritiske punktet pluss noe negativt. Derfor er det kritiske punktet et globalt maksimum. Det ligger inne i Ω, siden $\frac{(10/7)^2}{16} + \frac{(8/7)^2}{9} < 1$, så det globale maksimumet er $f(10/7, 8/7) = 100/7$. Minimum ligger på $\partial\Omega$. På de rette delene er f parabler som vender ned, så minimum ligger i endepunktene, og på den krumme delen er

$$f(4\cos\theta, 3\sin\theta) = -12\cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta + 16\cos\theta + 18\sin\theta - 8 \qquad \theta \in [0, \pi/2]$$

som vi plotter:

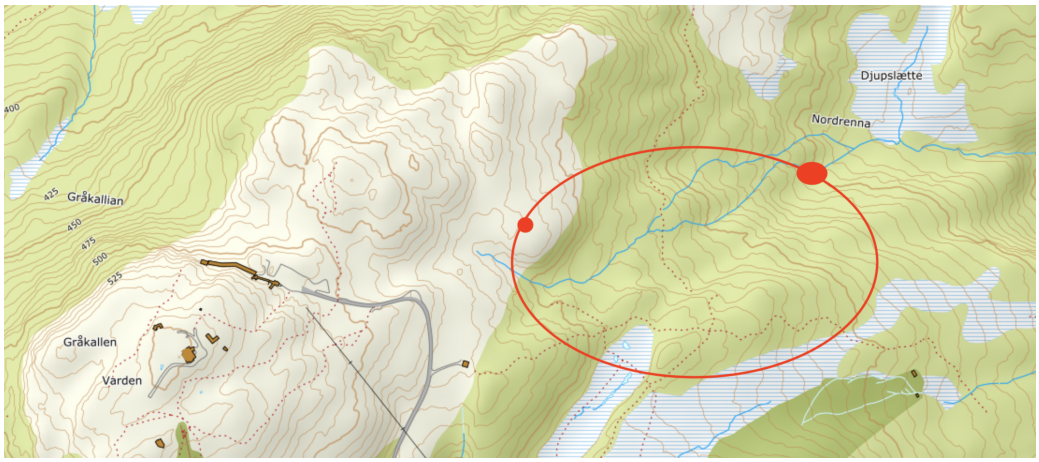


Også her ligger minimum i endepunktene, så kandidatene er hjørnene:

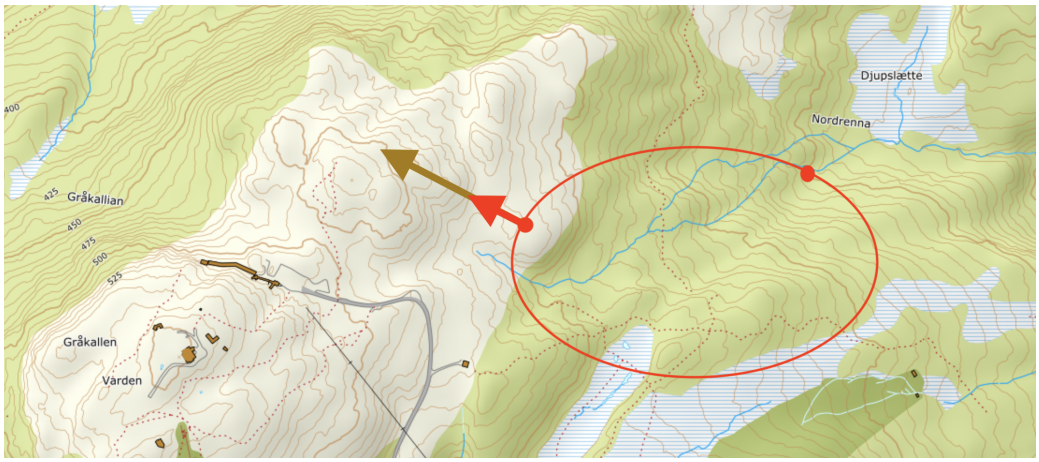
$$f(0, 0) = f(4, 0) = f(0, 3) = 8,$$

og globalt minimum er 8.

44 Figuren viser en tur langs en ellipse på et fjell. De fleste ser straks hvor turens høyeste og laveste punkt er:



Nå gjelder det å tenke på f (altså den funksjonen du skal maksimere eller minimere) som en funksjon som beskriver fjellet du går på. Nivåkurvene til f er det som er printa som ekvidistanselinjene på et vanlig turkart. Den snedige ideen til Lagrange var å se på turtrajektorien som nivåkurven til en eller annen funksjon g, og så innse at i turens topp-, bunn- eller sadelpunkter **må gradienten til f være parallell med gradienten til g, siden gradienter og nivåkurver står normalt på hverandre.**



Denne ideen gir tre likninger

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$
$$g(x) = c$$

som kan løses for x og λ. Det er litt forskjellige betingelser ute og går; f og g må være deriverbare, og gradientene kan ikke være null, og du må ikke være i endepunktet for trajektorien og litt forskjellig.

Alternativt kan vi parametrisere kurven og bruke kjerneregelen og få

$$\nabla^T f(x(t))\dot{x}(t) = 0$$

siden $f(x(t))$ har et lokalt maksimum og

$$\nabla^T g(x(t))\dot{x}(t) = 0$$

siden $g(x(t))$ er konstant. Begge gradientene står altså normalt på $\dot{x}(t)$, og i planet betyr det at de er parallelle.

45 Gradienten til L er

$$\begin{aligned} L'(x,\lambda) &= \left(\partial_{x_1} L, \partial_{x_2} L, \partial_\lambda L\right) \\ &= \left(\partial_{x_1} f(x) - \lambda \partial_{x_1} g(x), \partial_{x_2} f(x) - \lambda \partial_{x_2} g(x), c - g(x)\right), \end{aligned}$$

og setter vi denne lik null, får vi nøyaktig lagrangelikningene $\nabla f = \lambda \nabla g$ og $g(x) = c$.

Vi kan nå prøve oss på den krumme delen av $\partial\Omega$ i oppgave 42, som har likning

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} = 1,$$

slik at

$$g(x) = \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9}.$$

Gradienten til g er

$$g'(x) = \left(\frac{x_1}{8}, \frac{2x_2}{9}\right)$$

mens gradienten til f regnet vi ut i oppgave 28:

$$f'(x) = (-2x_1 - x_2 + 4, -x_1 - 4x_2 + 6).$$

Alt i alt får vi likningssystemet

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 4 &= \lambda \frac{x_1}{8} \\ -x_1 - 4x_2 + 6 &= \lambda \frac{2x_2}{9} \\ \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

De to første likningene kan skrives om til

$$\begin{aligned} (\lambda + 16)x_1 + 8x_2 &= 32 \\ 9x_1 + 2(\lambda + 18)x_2 &= 54 \end{aligned}$$

og inverterer vi matrisen, blir

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(\lambda+16)(\lambda+18) - 72} \begin{pmatrix} 2(\lambda+18) & -8 \\ -9 & (\lambda+16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 54 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\lambda+16)(\lambda+18) - 36} \begin{pmatrix} 2(\lambda+18) & -8 \\ -9 & (\lambda+16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setter vi denne inn i ellipselikningen, får vi en fjerdegradslikning i λ som er uhåndterlig med penn og papir, men triviell å løse med en numerisk likningsløser. Den har to reelle løsninger. Den ene, $\lambda \approx -35.1$, gir punktet $(-2.62, -2.27)^T$, som ligger på ellipsen, men ikke i første kvadrant. Den andre, $\lambda \approx -10.14$, gir punktet $(3.53, 1.42)^T$ med høyde 9.16 - det samme maksimumet på buen som vi fant i oppgave 42. Lagranges metode ser ikke hjørnene i $\partial\Omega$, så dem må vi sjekke for seg selv, og der finner vi igjen minimumet 8.

46 Gradienten til fjellet er

$$h'(x) = (-2x_1 - x_2, -x_1 - 2x_2)$$

og setter vi

$$g(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4},$$

blir

$$g'(x) = (2x_1, x_2/2)\,.$$

Lagrangelikningene blir

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= 2\lambda x_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2/2 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 2(1+\lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4+\lambda)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dersom matrisen er inverterbar, er $x = 0$ den eneste løsningen, og dette punktet ligger ikke på ellipsen, så da får vi nesten kreve at determinanten

$$p(\lambda) = 2(1+\lambda)(4+\lambda) - 2 = 2\lambda^2 + 10\lambda + 6$$

blir null, noe som skjer når

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Likningen $2(1+\lambda)x_1 + x_2 = 0$ gir i såfall at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2(1+\lambda) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \mp \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter inn disse punktene i ellipselikningen, får vi

$$s^2 \left(1 + \frac{1}{4}(3 \mp \sqrt{13})^2\right) = 1,$$

slik at

$$s = \pm \frac{2}{\sqrt{4 + (3 \mp \sqrt{13})^2}}.$$

Alt i alt har vi nå de fire punktene

$$\pm \frac{2}{\sqrt{4 + (3 \mp \sqrt{13})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \mp \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Setter vi dem inn i h, får vi

$$h\left(\pm(0.957, -0.580)\right) = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \approx 0.30$$

$$h\left(\pm(0.290, 1.914)\right) = -\frac{\sqrt{13} + 3}{2} \approx -3.30,$$

så turens høyeste punkt har høyde $(\sqrt{13}-3)/2$, og det nås i de to punktene $\pm(0.957, -0.580)^T$.

47 Vi setter

$$g(x) = 6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2,$$

og beregner

$$f'(x) = (1, 2)$$

og

$$g'(x) = (12(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2), 12(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)),$$

slik at lagrangelikningene blir

$$\begin{aligned} 12(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2) &= \lambda \\ 12(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) &= 2\lambda \\ 6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 &= 3 \end{aligned}$$

Med $u = x_1 + x_2$ og $v = x_1 - x_2$ blir likningssystemet

$$\begin{aligned} 12u + 4v &= \lambda \\ 12u - 4v &= 2\lambda \\ 6u^2 + 2v^2 &= 3 \end{aligned}$$

Gausseliminasjon av de to første likningene gir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og setter vi denne i ellipselikningen, får vi

$$\lambda^2 \left(\frac{6}{64} + \frac{2}{64} \right) = 3,$$

som gir

$$\lambda = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

Da er $u = -v = \pm\sqrt{6}/4$, og siden $x_1 = (u + v)/2$ og $x_2 = (u - v)/2$, blir punktene

$$x = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/4 \end{pmatrix}.$$

Siden f er lineær, gir det ene punktet maksimum og det andre minimum. Den største verdien er $f(0, \sqrt{6}/4) = \sqrt{6}/2 \approx 1.22$.