Hva kommer på eksamen i TMA4121?

På eksamen vil det være to hauger med lapper som du kan trekke fra. Du kan selv vurdere dine ferdigheter og velge hvilken haug du vil trekke fra. Du kan velge om du vil gjøre oppgaven på tavlen (anbefales) eller på et stort ark (vi har liggende).

- DEN LILLE HAUGEN er for de som er tilfredse med å stå på eksamen. Dersom du trekker fra denne haugen, er E den beste karakteren du kan få.
- DEN STORE HAUGEN er for de som ønsker å ha muligheten til å få bedre karakter.

Vi setter av tjue minutter til hver kandidat. De ti første går med til å lappetrekking og forberedelse, og de siste ti er selve eksamen. Eksamen blir avholdt i F3, gamle fysikk. Møt opp noen minutter før tidspunktet du har valgt, og vent på gangen. Therese vil komme ut og la deg trekke oppgave, og så får du åtte minutters forberedelsestid alene inne på F2 med alle hjelpemidler tilgjengelig. Du får trekke oppgave én gang på nytt om du får en du VIRKELIG ikke vil ha på første trekk. Det er lov å kommunisere med andre studenter over nett under forberedelsestiden, men det er forbudt å slippe noen andre inn på F2. (Dersom denne regelen blir brutt, blir det opprettet juksesak.) Therese kommer og henter deg når de åtte minuttene er over. Selve eksamen er uten hjelpemidler.

DEN LILLE HAUGEN

$\boxed{1}$ Vi definerer f sin komplekse deriverte

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Bruk denne definisjonen til å utlede Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og vis at u og v er harmoniske funksjoner.

$\boxed{2}$ Skriv opp bølgelikningsproblemet

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Forklar kort hva dette er en modell for, og utled løsningsformelen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos c\frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L} t \Big) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad \text{og} \quad B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Du kan ta løsningen av oppgave 6 under for gitt.

$\boxed{3}$ Forklar kort hva

$$u_t = u_{xx}$$

med rand- og initialkrav:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = f(x)$$

er en modell for, og hvordan man kan løse dette problemet numerisk.

$\boxed{4}$ 1: Skriv opp Maxwells likninger.

2: Anta statisk tilfelle, og vis at det elektrostatiske potensialet tilfredsstiller Poissons likning

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3: Anta homogent tilfelle, og vis at det elektriske feltet tilfredsstiller bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\mathbf{E}$$

$\boxed{5}$ Løs partikkel-i-boks-problemet

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \qquad \Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = 0.$$

Du kan ta løsningen av oppgave 6 under for gitt. (Husk normalisering til slutt!)

$\boxed{6}$ Når man partielle differensiallikninger ved separasjon av variable, må man stadig vekk løse randverdiproblemet

$$f''(x) + kf(x) = 0, \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

Løs dette problemet.

DEN STORE HAUGEN

$\boxed{1}$ Vi definerer f sin komplekse deriverte

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Bruk denne definisjonen til å utlede Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og vis at u og v er harmoniske funksjoner.

2 La $\mathcal{C}$ være en sirkel med radius r og sentrum i $z_0 = x_0 + iy_0$ i det komplekse planet. Ta utgangspunkt i Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

for en kompleks analytisk funksjon f, og vis at real- og imaginærdelene til f tilfredsstiller

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial\Omega} u \cdot ds = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u\, d\mathbf{x}$$

der Ω er sirkelskiven med radius r og sentrum i (x_0, y_0) i $\mathbb{R}^2$.

3 Skriv opp definisjonen på komplekst linjeintegral. Forklar hva Cauchys integralteorem sier, og regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z - z_0)^n}\, dz$$

der $\mathcal{C}$ er en sirkel med sentrum i z_0 i det komplekse planet og n er et heltall.

4 Forklar hva residyteoremet sier, og finn

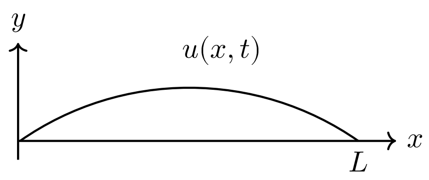
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-1/z^2}}{z^2} - \frac{\cos 2z}{4z}\, dz$$

der $\mathcal{C}$ er einingssirkelen.

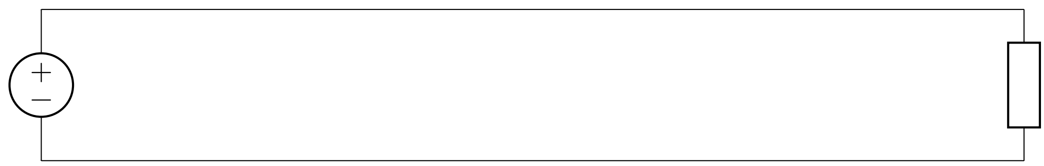
5 Utled bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Du kan enten utlede den for utslaget til en oppspent streng:



eller for spenningen i en transmisjonslinje:



6 Utled varmelikningen i isotropt medium

$$\rho c u_t = \kappa \Delta u$$

der c er den spesifikke varmekapasiteten, ρ er massetetthet, og κ er termisk konduktivitet.

7 1: Skriv opp Maxwells likninger.

2: Anta statisk tilfelle, og vis at det elektrostatiske potensialet tilfredsstiller Poissons likning

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3: Anta homogent tilfelle ($\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$), og vis at det elektriske feltet tilfredsstiller bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}$$

$\boxed{8}$ Skriv opp bølgelikningsproblemet

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

med rand- og initialkrav:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

Forklar kort hva dette er en modell for, og utled løsningsformelen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \right) \sin \frac{n\pi}{L}x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx \quad \text{og} \quad B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx.$$

Du kan ta løsningen av oppgave 17 under for gitt.

$\boxed{9}$ Skriv opp varmelikningsproblemet

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

med rand- og initialkrav:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

Forklar kort hva dette er en modell for, og utled løsningsformelen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi}{L}x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx.$$

Du kan ta løsningen av oppgave 17 under for gitt.

$\boxed{10}$ Forklar kort hva

$$V_{xx} + V_{yy} = 0$$

på rektangelet $[0,a] \times [0,b]$ med randkrav

$$V(x,0) = V(0,y) = V(a,y) = 0 \qquad V(x,b) = f(x)$$

er en modell for, og utled løsningsformelen

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

Du kan ta løsningen av oppgave 17 under for gitt.

$\boxed{11}$ Vis at Laplaces likning

$$V_{x_1 x_1} + V_{x_2 x_2} = 0$$

er rotasjonsinvariant.

$\boxed{12}$ Vis at laplaces likning er

$$0 = V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta}$$

i polarkoordinater.

$\boxed{13}$ Forklar hva

$$u_t = u_{xx}$$

med rand- og initialkrav:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = f(x)$$

er en modell for, og hvordan man kan løse dette problemet numerisk.

$\boxed{14}$ Forklar hva

$$V_{xx} + V_{yy} = 0$$

på rektangelet $[0,1] \times [0,1]$ med randkrav

$$V(x,0) = V(0,y) = V(1,y) = 0 \qquad\qquad V(x,1) = 1$$

er en modell for, og hvordan man kan løse dette problemet numerisk.

$\boxed{15}$ Løs partikkel-i-boks-problemet

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \qquad \Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = 0.$$

Du kan ta løsningen av oppgave 17 under for gitt. (Husk normalisering til slutt!)

$\boxed{16}$ Skriv opp den fulle Schrødingerlikningen

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi$$

og

1 Vis at $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \; dx = 0$ og forklar hva dette betyr.

2 Separer variable $\Psi(x,t) = f(t)\psi(x)$, vis at

$$f(t) = Ae^{-iEt/\hbar}$$

og utled den tidsuavhengige Scrödingerlikningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi.$$

(De to siste ble gjort i en forelesning jeg glemte å ta opp, men du finner alt i Griffiths - Introduction to Quantum Mechanics, som ligger på nett.)

$\boxed{17}$ Når man løser partielle differensiallikninger ved separasjon av variable, må man stadig vekk løse randverdiproblemet

$$f''(x) + kf(x) = 0, \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

Løs dette problemet.

$\boxed{18}$ Skriv opp Maxwells likninger. Anta homogent tilfelle ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$ og $\rho = 0$) og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.