Hva kommer på eksamen i TMA4106?

På eksamen får du trekke en lapp, og på den står det en av oppgavene under. Du kan velge om du vil gjøre oppgaven på tavlen (anbefales) eller på et stort ark (vi har liggende).

Vi setter av tjue minutter til hver kandidat. De fem første går med til å lappetrekking og forberedelse, og de siste femten er selve eksamen, som består av at du gjør oppgaven og at vi stiller noen oppfølgingsspørsmål. Eksamen blir avholdt i EL4.

Møt opp noen minutter før tidspunktet du har valgt, og vent på gangen. Jeg kommer ut og lar deg trekke oppgave, og så får du fem minutters forberedelsestid alene inne på A161 med alle hjelpemidler tilgjengelig. Du får trekke oppgave én gang på nytt om du får en du VIRKELIG ikke vil ha på første trekk, men da må du gjøre denne, og ikke den første du trakk. Det er lov å kommunisere med andre studenter over nett under forberedelsestiden, men det er forbudt å slippe noen andre inn på A161. (Dersom denne regelen blir brutt, blir det opprettet juksesak.) Jeg kommer og henter deg når de fem minuttene er over. Selve eksamen er uten hjelpemidler.

$\boxed{1}$ Utled Eulers formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, gjør rede for at multiplikasjon med i er en $\pi/2$ radianers rotasjon mot klokken i det komplekse planet, og faktoriser polynomet

$$p(z) = z^4 + i.$$

$\boxed{2}$ Van der Pols likning

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

modellerer som kjent alt fra radiorør til hjerteslag til kontinentalplategnisninger.

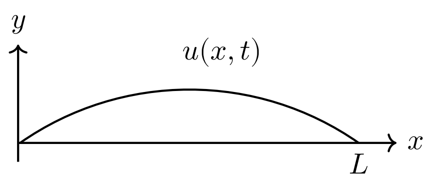
1: Sammenlikne med $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ og forklar oppførselen til van der Pols likning.

2: Skriv om til system og forklar hvordan likningen kan løses numerisk.

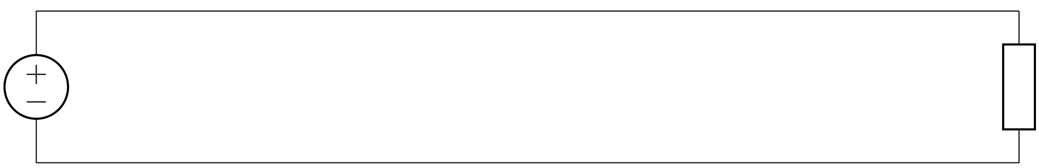
$\boxed{3}$ Utled bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Du kan enten utlede den for utslaget til en oppspent streng:



eller for spenningen i et ganske langt ledningspar:



$\boxed{4}$ La

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1.$$

1: Finn tangentplanet til f i punktet $(2, 3)$.

2: Finn

$$\iint_D f(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \iint_D x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1\ d\mathbf{x}$$

der D er trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(3, 0)$ og $(3, 1)$.

$\boxed{5}$ 1: En kurve er parametrisert ved $\mathbf{x}(t)$. Skriv opp uttrykket for enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$, forklar hvorfor normalvektoren er den deriverte av denne, og skriv opp uttrykket for enhetsnormalvektoren.

2: En brugde svømmer langs kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

Finn enhetsnormalvektoren til denne kurven, og brugdens planktoninntak dersom planktontettheten er gitt ved $f(\mathbf{x}) = x_3$.

$\boxed{6}$ Spenningen til en punktladning q er

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}}$$

1: Vis at denne tilfredsstiller Laplaces likning

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0$$

så lenge $\mathbf{x} \neq 0$.

2: En ladning q er plassert i origo. Hva blir kraften på en ladning $-q$ i punktet $(1, 2, 3)$?

$\boxed{7}$ Skriv opp den homogene løsningen til

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{i\omega t}$$

og finn den inhomogene løsning dersom $b \neq 0$. Forklar begrepene naturlig respons, tvungen respons og frekvensrespons.

$\boxed{8}$ Når man løser partielle differensiallikninger ved separasjon av variable, må man stadig vekk løse randverdiproblemet

$$f''(x) + kf(x) = 0, \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

Løs dette problemet.

$\boxed{9}$ Utled løsningsformelen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx \quad \text{der} \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\ dx.$$

for varmelikningen

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),$$

med rand- og initialkrav

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{og} \quad u(x,0) = f(x),$$

og forklar hva dette er en modell for. Du kan anta løsningen av oppgave 8 som kjent.

10 Utled løsningsformelen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx,$$

for bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

og forklar hva dette er en modell for. Du kan anta løsningen av oppgave 8 som kjent.

11 Utled løsningsformelen

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{n^2\hbar^2}{2m}t/\hbar} \sin nx$$

for partikkel-i-boks-problemet

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \qquad \Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = 0,$$

og forklar hva dette er en modell for. Du kan anta løsningen av oppgave 8 som kjent.

12 Utled at løsningen til Laplaces likning

$$V_{xx} + V_{yy} = 0,$$

på rektangelet $[0,\pi] \times [0,\pi]$ med randkrav

$$V(x,0) = V(0,y) = V(\pi,y) = 0$$

og

$$V(x,\pi) = f(x).$$

er

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh ny \sin nx,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

og forklar hva dette er en modell for. Du kan anta løsningen av oppgave 8 som kjent.

$\boxed{13}$ Finn fourierrekken til den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t \leq 0 \\ \pi - t & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

$\boxed{14}$ Skriv opp aksiomene for komplekst indreprodukt $(\cdot, \cdot)$. Vis at indreproduktet er antilineært i et av argumentene, og vis at dersom $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_n\}$ er en ortogonal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}_k$$

er

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)}.$$

Forklar hvorfor fourierkoeffisientene til

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

er

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int}\, dt.$$

$\boxed{15}$ Skriv opp aksiomene for reelt indreprodukt $(\cdot, \cdot)$. Vis at indreproduktet er lineært i begge argumentene, og vis at dersom $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}_k$$

er

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Forklar hvordan summen av de kvadrerte fourierkoeffisientene til et spenningssignal henger sammen med energien til signalet.

$\boxed{16}$ Skriv opp definisjonen på laplacetransform, utled regneregelen

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$$

og finn $\mathcal{L}(x)$ dersom x er

1: $\cos t$

2: $\sin t$

3: løsningen til $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \cos t + i \sin t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$\boxed{17}$ Skriv opp definisjonen på laplacetransform, utled regneregelene for s-skift og t-skift, og finn $\mathcal{L}(x)$ dersom x er

1: $\cos t$

2: enhetssprangfunksjonen $u(t-a)$

3: $u(t-a)\cos(t-a)$

4: $e^{bt} u(t-a)\cos(t-a)$