TMA4101/4106/4111/4121

49 - APOTEOSE

Vi nærmer oss veis ende. En av de siste postene på programmet er å utlede en formel for invers laplaceomvending. Vi vet at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

og for signaler som har fourieromvending, er denne helt fin. Men hva med

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases} \qquad ?$$

Denne har laplaceomvending, men ikke fourieromvending. Finnes det en formel slik at

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \quad ?$$

Vi kan ikke bare skrive

$$\sin t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

for dette integralet konvergerer ikke.

Derfor kompleks analyse:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_analysis`
Ved første øyekast kan det se ut som om funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ likner på funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ siden man putter inn noe med to dimensjoner og får ut noe med to dimensjoner. Men likheten er temmelig overfladisk. En funksjon av en kompleks variabel oppfører seg virkelig fundamentalt annerledes enn en funksjon av en reell variabel. Vi skriver

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

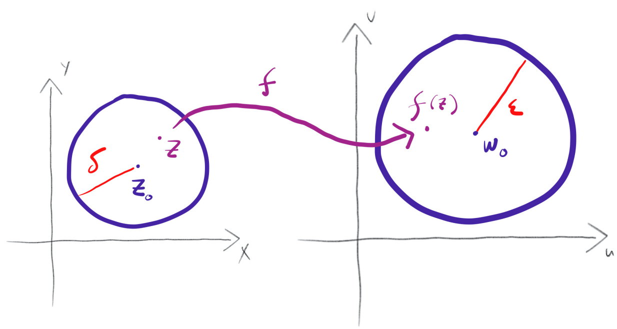
der $z = x + yi$ er en uavhengig kompleks variabel, og $w = u + iv$ er en avhengig variabel. Merk at u og v er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$. Nå er vi over i en del av matematikken som av mange matematikere betraktes mer som som en form for kunst enn en form for vitenskap. Det er ikke så lett å visualisere komplekse funksjoner, så det man må gjøre er å samle på fun facts. La oss begynne med grenseverdier.

Vi sier at

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - w_0| < \epsilon$$



Korrekt bruk av denne definisjonen krever et høyt matematisk nivå, men vi bruker den først og fremst til å bevise teoremer eller definere andre ting presist. Vi sier at f er **deriverbar** i z dersom

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. På noen måter fungerer denne definisjonen akkurat som den du er vant til fra envariabel kalkulus; for eksempel er $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$ og $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$ og så videre. Men det er noen ting som er helt annerledes, siden det komplekse tallet h må få kunne reise inn mot z på vilkårlig vis.

$\boxed{1}$ La h reise mot $z = x + yi$ langs med den rette linjen $h(t) = x + t + yi$ (der $t \in \mathbb{R}$), altså en rett linje parallell med realaksen. Hva kan du si om de partiellderiverte til $u(x, y)$ og $v(x, y)$?

$\boxed{2}$ Gjenta eksperimentet med den rette linjen $h(t) = x + i(y + t)$, altså en rett linje parallell med imaginæraksen. Hva kan du nå si om de partiellderiverte til $u(x, y)$ og $v(x, y)$?

Hvis du fikk til oppgavene over, endte du opp med å utlede Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\boxed{3}$ Cauchy-Riemannlikningene forteller deg noe om nivåkurvene til u og v. Hva?

Men det blir bedre:

$\boxed{4}$ Vis at u og v er harmoniske funksjoner dersom f er deriverbar.

Siden u og v er harmoniske funksjoner dersom f er deriverbar, har komplekse deriverbare funksjoner anvendelser innen elektrostatikk.

$\boxed{5}$ Anta at u er potensialet til et elektrisk felt. Hva får du i så fall ut av v?
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_07.html`

Komplekse deriverbare funksjoner oppfører seg annerledes enn alt annet du har sett. og oppførselen kan oppsummeres som følger. En reell funksjon kan fint ha knekk i den fjerde, femte eller attendederiverte. For eksempel eksisterer den andrederiverte til $x^3 \sin(1/x)$, men ikke den tredjederiverte. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(x^2-1)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

er glatt men ikke analytisk; alle de deriverte eksisterer overalt (selv i $x = \pm 1$), men det finnes ingen a slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots$$

på et intervall som inneholder $x = 1$ eller $x = -1$. Komplekse funksjoner opplever ikke disse sjatteringene hva angår regularitet. En kompleks funksjon som er deriverbar i et punkt z_0 kan alltid skrives som en taylorrekke i en omegn rundt z_0. Det finnes ingen mellomting mellom deriverbar og analytisk, og derfor sier vi bare **analytisk** eller **holomorf**.

$\boxed{6}$ Bruk Cauchy-Riemann-likningene til å sjekke at $f(z) = \overline{z}$ ikke er analytisk.

Men det er når vi begynner å integrere at det blir moro. Komplekse funksjoner integreres omtrent som linjeintegraler over vektorfelt. La Γ være en glatt kurve i det komplekse planet, parametrisert av $z(t)$, med endepunkter $z(a)$ og $z(b)$. Det komplekse linjeintegralet til f over Γ er

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dz$$

$\boxed{7}$ Integrer noe enkelt, for eksempel $f(z) = z^2$ eller z^3 eller noe slikt langs en eller annen enkel kurve, for eksempel enhetssirkelen parametrisert ved

$$z(t) = e^{it} \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

og se om dette minner om noe du har sett før.
Hvis du er av typen som trenger å gjøre masse regneoppgaver for å trene, kan du gå løs på oppgavene i kapittel 14.1 i Kreyszig.

I oppgaven over begynte du å oppdage noe som calles Cauchys integralteorem. Det kan formuleres på flere måter, men det vanligste er å si at det lukkede integralet til en analytisk funksjon over en enkeltsammenhengende kurve er null:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

Det er altså stort sett ingenting å integrere. Unntaket er hvis integrasjonskurven inneholder et eller flere punkter der funksjonen ikke er deriverbar.

$\boxed{8}$ Beregn

$$\int_\Gamma (z - z_0)^n\,dz$$

for alle heltallige n, der Γ er en sirkel sentrert i z_0 med radius r.

Oppgaven over kan brukes til å utlede noe som kalles Cauchys integralformel. Dersom f er analytisk i z_0, er også funksjonen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

analytisk i z_0 siden grenseverdien

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

er i orden.

$\boxed{9}$ Bruk Cauchys integralteorem på en enkeltsammenhengende kurve Γ som omslutter punktet z_0, og utled formelen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

(Hint: Du trenger også et av integralene fra oppgave 8.)

Cauchys integralformel kan generaliseres til

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

men utledningen er litt mer involvert, så den dropper vi. Se Kreyszig kap. 14.

Cauchys integralformel åpner for en alternativ oppskrift for koeffisientene til taylorrekken til f:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

og her kommer bomben. Høyresiden av Cauchys generaliserte integralformel gir også mening for negative n, og det viser seg at det går helt fint å "taylorutvikle" funksjoner om singulære punkter. For eksempel er

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}$$

så lenge $z\neq 0$, og vi kaller dette en **laurentrekke**. Her er grunnen til at dette er nyttig:

$\boxed{10}$ Skriv opp Cauchys generaliserte integralformel for $n=-1$, og regn ut

$$\int_\Gamma e^{1/z}\,dz$$

der Γ er en enkeltsammenhengende glatt kurve som omslutter origo.

Residyteoremet sier at du kan integrere analytiske funksjoner rundt kurver som omslutter singulariteter ved å laurentutvikle funksjonen om hver av singularitetene z_0, plukke ut koeffisienten til $1/z$ i hver av de korresponderende laurentrekkene, legge disse koeffisientene sammen og gange med $2\pi i$. Koeffisienten til $1/z$ i laurentrekken til f om z_0 kalles **residyet** til f i z_0. Det finnes en formler for å beregne residyet uten å sette opp laurentrekken til f i z_0. Noen ganger er det kjappere å finne residyene på denne måten, men som oftest er det enklest å manipulere laurentrekken for hvert singulære punkt til man kan lese av residyene av fra disse.

$\boxed{11}$ Les kap 16 i Kreyszig, og beregn

$$\int_\Gamma\frac{1}{z^2(1-z)}\,dz$$

der Γ er en glatt enkeltsammenhengende kurve som omslutter både $z=1$ og $z=0$.

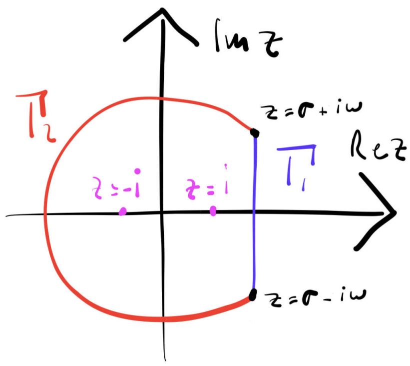
Nå er vi der at vi kan se på inversformelen for laplaceomvending. La oss begynne med å skrive $y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, og se at

$$X(s) = X(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{y}(\omega)$$

Dersom vi nå velger σ slik at y kan fourieromvendes, følger det ved variabelskiftet $s = \sigma + i\omega$ at

$$x(t) = e^{\sigma t}y(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + i\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} X(s)e^{st}ds$$

Dette integralet er ikke så godt å beregne, men her kan residyteoremet hjelpe oss. La oss se på



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

I følge formelen over, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}\frac{e^{st}}{s^2+1}ds$$

men hvis vi legger til en del av en sirkel slik at vi får en lukket kontur Γ (se figuren til høyre), kan vi bruke residyteoremet, og skrive

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_1}\frac{e^{st}}{s^2+1}ds + \int_{\Gamma_2}\frac{e^{st}}{s^2+1}ds\right) = \sum \text{res}\frac{e^{st}}{s^2+1}$$

dersom σ er stor nok til at begge singularitetene til $1/(s^2+1)$ ligger inni Γ.

$\boxed{12}$ Vis at summen av residyene til $\frac{e^{st}}{s^2+1}$ blir $\sin t$.

$\boxed{13}$ Vis at integralet $\int_{\Gamma_2}\frac{e^{st}}{s^2+1}ds$ går mot null når $\omega \to \infty$ på grunn av eksponensialfunksjonen i nevneren.