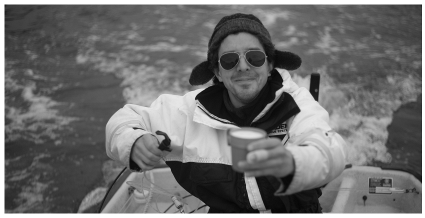
47 - BØLGELIKNINGEN

Bølgelikningen er en matematisk beskrivelse av en vibrerende streng, eller en stående luftbølge i en orgelpipe eller membranen i et trommeskinn eller en vibrerende sprettball eller elektromagnetiske bølger eller bølger på havet eller lydbølger i luft eller spenningen i to parallelle strømkabler som ligger inntil hverandre.

Forhåpentligvis husker du at bølgelikningen for en vibrerende streng er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$



der $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ er bølgefarten. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen blir satt igang, og hvor strengen er spent opp. Derfor tar vi med

randkrav: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

initialkrav: $u(x,0) = f(x)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$

slik at det går an å utlede at løsningen er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos c\frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L} t \Big) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \qquad \text{og} \qquad B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

$\boxed{1}$ Hvis du ikke får lyst til å lære å spille et strengeinstrument av alt dette, så vet ikke jeg. Når du drar i en gitarstreng og slipper, så løser du i bunn og grunn følgende problem: Finn løsningen til bølgelikningen med $c = 1$, $L = 2$, $g(x) = 0$ og

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Lag en animasjon av denne. Hm. Vi var vel enige om at vi lette etter deriverbare løsninger. Kommentar?

En stående trykkbølge inne i fløyte modelleres av den samme bølgelikningen men med randkrav

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

istedet. Dette kalles vonneumannrandkrav etter vår store leder og læremester von Neumann, som oppfant spillteori og atombomben og et par andre ting:
`https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann`
Fløyten har lengde L, og konstanten c avhenger nå av trykket og lydhastigheten i mediet der lydbølgene produseres. (Dersom du spiller på fløyten inni en gassballong full av helium, blir c høyere enn i luft.)

$\boxed{3}$ Kopier løsningsmetoden fra forrige problem, og vis at løsningen er

$$u(x,t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \right) \cos \frac{n\pi}{L}x,$$

der A er en vilkårlig konstant,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad \text{og} \qquad B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Hvis man ikke ønsker å bruke bølgelikningen til å beskrive en oppspent streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må vi lete etter en funksjon $u : \mathbb{R} \times [0,\infty)$ som tilfredsstiller bare bølgelikningen med de vanlige initialkravene, men med ingen randkrav. I varmelikningen gjorde dette alt mye vanskeligere, men nå blir det faktisk enklere. La oss begynne med å "løse" bølgelikningen uten noen former for rand- eller iniitalkrav.

$\boxed{4}$ Sjekk at

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

passer i likningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare.

Hva er en bølge egentlig? Oppgaven over forteller i bunn og grunn mye om det. Man kan tenke på det som en eller annen **profil** som flytter seg bortover. Oppgaven over forteller oss at bølgelikningen ikke bryr seg så mye om formen på profilen, den er fornøyd så lenge profilen siger bortetter med farten c, altså at løsningen kun er avhengig av $x+ct$ eller $x-ct$. Dersom du har en bestemt profil gitt av initialkrav, kan vi komme et steg videre.

$\boxed{5}$ Bruk

$$u(x,0) = f(x)$$

og

$$u_t(x,0) = g(x),$$

til å sette opp et 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Gausseliminer og integrer og vis at

bølgeligningen på hele x-aksen, med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

Løses av

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\,dt.$$

And now for something completely the same. Bølgelikningen følger også av Maxwells likninger:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Dette er litt jobb å vise, men vi nå skal se på det.

$\boxed{6}$ Det første som trengs er følgende identitet:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{F}\right) - \Delta \mathbf{F}$$

Husk definisjonen av rotasjon (bruk studass Kallands regel, ellers blir det umulig), brett opp ermene, skriv ut venstresiden og niglan på den et par minutter. (Ikke regn feil, da blir det også umulig.) Det er ikke så ille som det ser ut. Det tok meg ganske nøyaktig en togtur fra Nationaltheateret til Gardermoen, og jeg regner mye feil.

Det kalles jo vanligvis "elektromagnetiske bølger". Nå skal vi se hvorfor.

$\boxed{7}$ Utled likningen

$$\ddot{\mathbf{E}} = c^2 \Delta \mathbf{E}$$

fra Maxwells lover og antagelsen om at vi er i tomt rom, altså at $\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.
(Hint: du må derivere en av likningene med hensyn på t og sette den inn i en av de andre.)

Så vidt jeg vet var det omtrent slik Maxwell oppdaget at synlig lys er elektromagnetiske bølger. Han visste ikke i utgangspunktet at c var lyshastigheten i disse likningene, men eksperimentelle målinger gav verdier som lå påfallende nært til lyshastigheten, som første gang ble målt av Ole Rømer ved å studere rare avvik i tabellene for når Jupiters måner kommer ut av Jupiters skygge.

I populærvitenskapelige fremstillinger av elektromagnetiske bølger er $\mathbf{E}$ - og $\mathbf{B}$ - feltene tegnet som ortogonale på hverandre og på propagasjonsretningen. Dette gjelder ikke generelt, kun i spesialtilfellet tomt rom.

$\boxed{8}$ Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Dette bruker man når man regner på bølgeledere. Det er en hul kanal med en bestemt geometri slik at elektromagnetiske bølger reflekteres i kanalveggen på en stilig måte slik at du kan sende elektromagnetiske signaler uten særlig energitap.

$\boxed{9}$ Vis at bølgelikningen for et trommeskinn

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$$

blir

$$u_{tt} = \frac{1}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

i polarkoordinater.

Å løse denne er i bunn og grunn likt som for en gitarstreng, men mer grisete:

$\boxed{10}$ `https://www2.math.upenn.edu/~deturck/m241/wavedisk.pdf`

For sprettball blir det enda verre:

$\boxed{11}$ Vis at bølgelikningen for sprettball

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$$

blir

$$u_{tt} = \frac{2}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\tan\theta}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}$$

i kulekoordinater.

$\boxed{12}$ `https://www2.ph.ed.ac.uk/~paboyle/Teaching/PhysicalMaths/Notes_2010/notes_2010_part3.pdf`

Legg merke til alle de kjente navnene. Bessel var den første som greide å bestemme avstanden til en annen stjerne i solsystemet vårt. Helmholtz var egentlig kirurg, men har gjort seriøse bidrag i både matematikk og fysikk, samt innen forståelsen av hørselssansen og synsansen vår. Hans klassiker "Sensations of tone" er verdt å lese om du er interessert i musikk. Legendre skal vi møte på senere. Den ortogonale polynomenfamilien som dukker opp i løsningen for sprettball, brukes også til å lage avanserte metoder for numerisk integrasjon.