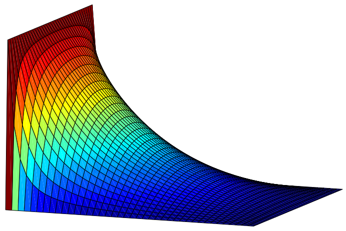
46 - LAPLACES LIKNING

Laplaces likning dukker opp så mange steder i fysikk at det er ikke helt godt å vite hvor man skal begynne om man skal forklare hvor den kommer fra. Det enkleste er å betrakte varmelikningen

$$\dot{T} = \Delta T$$

Det fysiske bildet du kan ha, er for eksempel en tynn varmeisolert plate der varmeenergi kan forsvinne ut eller inn gjennom sidekantene. Løsningen til varmelikningen vil gi temperaturen $T(\mathbf{x}, t)$ i platen gitt fornuftige rand- og initialkrav. Dersom varmestrømmen er konstant, er $\dot{T} = 0$, slik at varmelikningen blir

$$\Delta T = 0,$$



som kalles **Laplaces likning** etter denne stramme karen:
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
Her er en typisk figur. Den viser temperaturen i en tynn plate der temperaturen holdes konstant lik null på tre sider, konstant lik fem eller en eller noe på den siste siden, og tiden har gått langt nok til at varmeflyten er blitt stasjonær. (Jeg laget denne figueren i matlab som student, og må si at jeg er ganske fornøyd med den.)

Men siden dere går elsys, skal vi fokusere mest på elektrostatikk. Se kap. 2.6 i Johannes Skaars kompendium:
https://www.mn.uio.no/fysikk/personer/vit/johask/elektromagnetisme.pdf
La oss begynne med noe enkelt og nyttig. Som alle vet, er det noen ting som er smarte å huske, for da kan du tenke på dem mens du går på ski eller ligger i sengen og slapper av. Rene Descartes likte visst å ligge og dra seg til langt ut på morgenkvisten, for det var da han tenkte best:
https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/26291552/

$\boxed{1}$ Skriv opp Maxwells likninger på differensialform.

Nå kan du bruke din nye kunnskap til å utlede litt.

$\boxed{2}$ Vis at dersom feltene er statiske, blir likningssettet dekoblet:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Dersom du er et sted i rommet der det ikke er noen gitt ladningstetthet ($\rho = 0$) eller strømtetthet ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$), sier vi som sagt at vi er i **tomt rom**. Nå finnes det et vanskelig teorem som sier at under noen milde glatthetsbetingelser er et rotasjonsfritt vektorfelt alltid konservativt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Med andre ord er det implisert av Gauss' lov for magnetisme at et stasjonært elektrisk felt er konservativt. Forhåpentligvis husker du at du har verifisert dette for coulombfeltet på eksamen i TMA4106.

$\boxed{3}$ Nå kan du fikle videre med Maxwells likninger og utlede at potensialet ϕ tilfredsstiller Laplaces likning:

$$\Delta \phi = 0$$

Løsninger av Laplaces likning kalles **harmoniske funksjoner**, og spenningen til et elektrostatisk felt i tomt rom er altså en harmonisk funksjon. Dersom rommet ikke er helt tomt, tilfredsstiller spenningen Poissons likning

$$\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Denne skal vi komme tilbake til senere: `https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics`

På eksamen i TMA4106 hadde vi en forsmak på alt dette. (Jeg kalte den gang spenningen for V istedet for ϕ av hensyn til din kognitive last.)

$\boxed{12}$ Utled at løsningen til Laplaces likning

$$V_{xx} + V_{yy} = 0,$$

på rektangelet $[0, \pi] \times [0, \pi]$ med randkrav

$$V(x, 0) = V(0, y) = V(\pi, y) = 0$$

og

$$V(x, \pi) = f(x).$$

er

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh ny \sin nx,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

og forklar hva dette er en modell for.

Og nå kan vi fikle videre.

$\boxed{4}$ Plott løsningen over i python eller matlab for $f(x) = 1$. Plottet bør se ut omtrent som min vakre figur over.

$\boxed{5}$ Superposisjonsprinsippet gjelder ennå, likningen er jo lineær. Løs på rektangelet $[0, a] \times [0, b]$ med randkrav

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u(0, y) &= g(x) \\ u(a, y) &= h(x) \\ u(x, b) &= i(x) \end{aligned}$$

og plott.

Hvis du studerer plottene du laget over, vil du se at harmoniske funksjoner har pene egenskaper. Egenskapene under kalles "middelverdisatsene for harmoniske funksjoner".

$\boxed{6}$ Vis at for harmoniske funksjoner gjelder at

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r.

$\boxed{7}$ Bruk oppgaven over til å vise at også

$$u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{\Omega} u \, dx$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r.

Tilsvarende resultater gjelder i $\mathbb{R}^2$, men bevisene er penest i $\mathbb{R}^3$. Av middelverdisatsene følger maksverdisatsen, som sier at en funksjon som er harmonisk på Ω alltid tar maksimums- og minimumsverdier på $\partial\Omega$. Å bevise dette er i hardeste laget for oss, men du kan få en visuell bekreftelse på det i to dimensjoner i denne oppgaven:

$\boxed{8}$ Det er mulig å utlede Poissons formel

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2} \, d\phi$$

for randverdiproblemet

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

der Ω er en sirkelskive med radius a, sentrert i origo. Bruk Poissons formel og en numerisk integrasjonsrutine til å plotte u når $a = 1$ og $f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin^2\theta$.

Vi må også ettehvert studere noe annet enn rektangler:

$\boxed{9}$ Vis at laplaces likning blir

$$\frac{1}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

i polarkoordinater og

$$\frac{2}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\phi\phi} + \frac{1}{r^2\tan\theta}u_\theta + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

i kulekoordinater.

Rotasjonsinvarians er også en klassiker.

$\boxed{10}$ La A være 2×2-rotasjonsmatrisen. Vis at dersom $u(\mathbf{x})$ er harmonisk, er også $u(A\mathbf{x})$ det.

$\boxed{11}$ Potensialet til coulombfeltet kan utledes fra laplaces likning ved å lete etter løsninger som kun avhenger av $\|\mathbf{x}\|$. Prøv. Ser du en interessant forskjell mellom $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$?

Til slutt et problem som er vanskelig og kjedelig, og jeg vet ikke om vi får bruk for det. Men vi slenger det nå med. Det kalles halvplanproblemet, nemlig å løse Laplaces likning med randkrav

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$$

og

$$u(x,0) = f(x),$$

der

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

$\boxed{12}$ Kopier tilsvarende løsning for varmelikningen, og utled formelen

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\frac{y}{(x-v)^2+y^2}\,dv.$$