44 - ERWINS ESKAPADER

På engelsk har de et uttrykk som sier at "never meet your heroes". At Erwin Schrödinger var et stort geni kan ingen ta fra ham, men han har vært i hardt vær i det siste.

Vel vel, og nå over til hans berømte likning

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

der

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}$$

Denne kan som sagt ikke utledes, men kom ut av Erwin Schrödingers hjerne, og ser ut til å stemme ganske bra med virkeligheten, ihvertfall så lenge ikke ting beveger seg så fort at vi må inn med relativitetsteorien. Alle barn i barnehagen vet at Ψ ikke har noen direkte fysisk tolkning, men at $|\Psi|^2$ er sannsynlighetstetthetsfunksjon for partikkelens posisjon.

$\boxed{1}$ Dersom du ikke husker partikkel-i-boks-problemet

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) \qquad \Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = 0 \qquad \int_0^\pi |\Psi(x,t)|^2\ dx = 1$$

kan du repetere det nå.

Når du har skrevet opp løsningen, bør du legge merke til en ting.

$\boxed{2}$ Er det slik at hvis du først har valgt konstanten slik at

$$\int_0^\pi |\Psi(x,t)|^2\ dx = 1$$

fortsetter dette å gjelde for alle t?

Hvis du ser nøye på løsningen av partikkel-i-boks-problemet, vil du se at når du først har normalisert løsningen, fortsetter normaliseringen å funke videre for senere t med den samme normaliseringkonstanten. Dette er ikke tilfeldig.

$\boxed{3}$ Det følger direkte av Schrödingers likning at

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{x},t)|^2 \, d\mathbf{x} = 0.$$

Prøv å vise dette.
(Antagelig litt hardt, og vi må feie masse vanskelig matematikk under teppet for å "få det til" godt nok for en gjennomsnittlig fysiker. Gå på nett og få tak i den Griffiths fornøyelige klassiker "Quantum Mechanics". Det står i kap. 1.4.)

Inntil videre trenger vi ikke egentlig vite hva benevningen til Ψ er, men det er nå litt artig.

$\boxed{4}$ Benevningen til Ψ kan utledes fra informasjonen at

$$\iiint_D |\Psi|^2 \, d\mathbf{x}$$

er sannsynligheten for at partikkelen befinner seg i området D. Hva er benevningen?

I TMA4106 separerte vi variable på en bestemt måte. Dette var fordi vi løste en haug forskjellige partielle differensiallikninger på en gang, og da var det praktisk å separere slik at randverdiproblemet

$$f''(x) + kf(x) = 0 \qquad\qquad f(0) = f(\pi) = 0$$

på x-aksen ble det samme for alle likningene. Når man separerer variable i Schrödingers likning, er det imidlertid vanlig å separere på en litt annen måte. For å forstå hvordan det bør gjøres, er du nødt til å studere benevningen til hvert enkelt ledd i Schrödingers likning. Plancks konstant er $\hbar = 1.054571817 \cdot 10^{-34}$ Js.

$\boxed{5}$ Hva er benevningen til $\hbar\frac{\partial}{\partial t}$? $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$? V?

Vi har nå lyst til å separere variable, og gjette på at løsningen kan skrives

$$\Psi(\mathbf{x},t) = f(t)\psi(\mathbf{x}).$$

$\boxed{6}$ Sett dette uttrykket over inn i Schrödingers likning og seperarer på en slik måte at separasjonskonstanten (den du kaldte k i TMA4106) har en praktisk, nyttig og ikke minst klassisk benevning. (Hint: Svaret er gitt av forrige oppgave.)

$\boxed{7}$ Hvis du gjorde alt over riktig, bør det nå være mulig å utlede at

$$f(t) = e^{-Eit/\hbar}$$

og at

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

der E er ja du gjettet det energi.

Likningen for ψ er ganske berømt, og heter den **tidsuavhengige Schrödingerlikningen**. Dette er en egenvektorlikning, og de tillatte energinivåene E er egenverdiene til lineæroperatoren

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi$$

Det er vanlig å si at ingen mennesker skjønner kvantemekanikk. I skrivende stund er jeg den eneste her som ikke forstår det, og etter at denne uken er ferdig, kommer du heller ikke til å forstå det, og så kan du gå ut i verden og spre din uvitenhet. Men en ting har jeg skjønt: kvantemekanikkmennesker er fryktelig glade i lineæroperatorer og kvadratiske former.

$\boxed{8}$ La oss si at du har en partikkel som følger Schrödingerlikningen. Hva er den forventede posisjonen til partikkelen?
(Hvis du friker litt av trippelintegralet over kan du gjøre det i én romlig dimensjon.)

$\boxed{9}$ Hva med forventet moment?
(Denne er også litt vanskelig, men se på den tidsderiverte til forventet posisjon, og bruk samme triks som i oppgave 3.)

Hvis du fikk tak i korrekte uttrykk i oppgave 8 og 9 og ser nøye på dem, vil du se at de er kvadratiske former

$$(\Psi, L\Psi) \qquad \text{der} \qquad L\Psi = x\Psi \qquad \text{og} \qquad L\Psi = \frac{-i\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

henholdsvis. Posisjon og moment er begge målbare størrelser, så kvantefysikere har konkludert med at målbare størrelser kan representeres ved en eller annen lineæroperator. Nå er det artige at moment er fourieromvendingen til posisjon, og at dette faktisk impliserer Heisenbergs usikkerhetsprinsipp.

$\boxed{10}$ Finn egenfunksjoner til posisjon- og momentoperatorene.
(Hint: Ta en titt på basisfunksjonene for tids- og frekvensdomene fra fourieranalysen.)