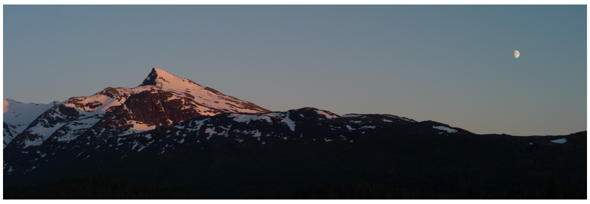
TMA4101/4106/4111/4121

43 - MAXWELLS LIKNINGER

I dette semesteret skal vi stort sett holde på med partielle differensiallikninger. Dette er differensiallikninger som modellerer fysiske situasjoner der både tid og rom er uavhengige variable, og vi skal konsentrere oss om de fem store (eller åtte om du teller maxwell som fire):

- Bølgelikningen
- Varmelikningen
- Schrödingers likning
- Laplaces likning
- Maxwells likninger



Alle disse henger litt sammen med hverandre på ymse måter, og alle sammen er umulige å komme utenom i fysikk. Det finnes også andre viktige partielle differensiallikninger, for eksempel Navier-Stokes likninger for væskeflyt eller Einsteins likninger for gravitasjon. De er antagelig ikke så viktige for MTELSYS, og jeg tror ikke vi rekker å studere dem. Kanskje neste år.

Skal man skjønne noe av disse likningene, må man ha peiling på vektorkalkulus, derfor begynner vi med litt repetisjon. Gradientoperatoren ∇ kan brukes på fire grunnleggende måter:

- som gradienten til en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$: ∇u
- som divergensen til en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$: $\nabla \cdot u$
- som rotasjonen til en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$: $\nabla \times u$
- som symbolet til linjeforeningen til fysmat: ∇

$\boxed{1}$ Hvis dette ikke sier deg noen ting, må du nok repetere litt.

Så har vi laplaceoperatoren. For funksjoner fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$ er denne er gitt ved

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)\,.$$

$\boxed{2}$ Hvis definisjonen over heller ikke sier deg noen ting, må du kanskje også repetere litt.

Løsningene til forskjellige partielle differensiallikninger er stort sett funksjoner på $\mathbb{R}^3$ eller på $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, altså $\mathbb{R}^3$ pluss tidsaksen. De forskjellige gradientoperatorene over går som regel bare på de romlige koordinatene, slik at for eksempel

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}, t).$$

Den tidsderiverte skriver vi

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

Studiet av partielle differensiallikninger er avansert, og det finnes bare analytiske løsninger i sjeldne tilfeller der geometrien er enkel. Men partielle differensiallikninger er viktige i alle slags anvendelser, og på verdensbasis finnes det millioner av mennesker som bruker dem til modellering, enten via numeriske løsninger eller forenklinger som muliggjør analytisk løsning. Det går også an å analysere egenskaper som eventuelle løsninger må ha, slik at likningene i seg selv kan brukes til prediksjon. Flere fysikere opp gjennom har for eksempel spådd at tunge ting i verdensrommet vil være i stand tli å lage gravitasjonslinse, men det var Einsteins gravitasjonslikninger som først gav den korrekte prediksjonen for lysavbøyningen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_lens`

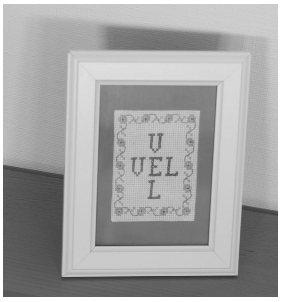
James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations`
Dette er et sett med fire empiriske lover som ikke kan utledes fra mer grunnleggende prinsipper. Han formulerte det som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt noen år etter ned til denne pene formen, kalt **Maxwells likninger på differensialform**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Gauss' lov)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Faradays induksjonslov)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Gauss' lov for magnetisme)}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \qquad \text{(Amperes lov)}$$



Dette er et koblet sett med differensiallikninger, der

- **de ukjente er** det elektriske feltet $\mathbf{E}$ og det magnetiske feltet $\mathbf{B}$
- **drivende ledd er** en gitt ladningstetthet ρ og en gitt strømtetthet $\mathbf{J}$
- **fysiske konstanter er** lyshastigheten i vakuum c og permittiviteten i vakuum ϵ_0

Dersom både $\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, sier vi at vi er i tomt rom.

La oss nå repetere noe helt grunnleggende, og se på det i et nytt lys. Det blir ganske vakkert. Dersom en ladning står stille i origo, er det elektriske feltet gitt ved

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

$\boxed{3}$ Dobbeltsjekk at $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ så lenge $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, og bruk divergensteoremet til å vise at

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot dS = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \mathbf{0} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{0} \notin \Omega \end{cases}$$

Hva minner dette mistenkelig om?

Maxwells likninger kan også skrives på integralform:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} \\ \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot dS &= 0 \\ \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot dS \\ c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot dS \end{aligned}$$

der Ω er et tredimensjonalt område i $\mathbb{R}^3$, mens Σ er en flate.

$\boxed{4}$ Utled disse fra Maxwells likninger på differensialform. Venstresidene ser ganske annerledes ut på integralform, hva tror du at du må bruke på dem?

Maxwells likninger er nå litt hårete greier, og man må fikle med dem en stund før man liker dem.

$\boxed{5}$ Les kapittel II-18 i Feynman:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/`
eller finn Griffiths klassiker "Electrodynamics" på nett, og forklar hva de fire likningene sier.