Hva kommer på eksamen i TMA4121?

$\boxed{1}$ Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled

1: de korresponderende likningene på integralform,

2: likningen for ladningskonservering,

2: Poissons likning ved statisk tilfelle ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$), og

4: bølgelikningen ved homogent tilfelle ($\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

$\boxed{2}$ Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

$\boxed{3}$ Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

$\boxed{4}$ Utled telegraflikningene:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L\frac{\partial I}{\partial t}$$
$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t}$$

for et langt ledningspar.

$\boxed{5}$ Løs bølge- og varmelikningen på hele $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Utled middelverdisatsene

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\, dS = \frac{3}{4\pi r^3}\iiint_{\Omega} u\, dx$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r, og u er en harmonisk funksjon.

$\boxed{7}$ Vis at harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante.

$\boxed{8}$ Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

i polare koordinater.

$\boxed{9}$ La u og v være henholdsvis real- og imaginærdelen til en kompleks analytisk funksjon f. Bruk definisjonen av kompleks derivert til å utlede Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og vis at u og v er harmoniske funksjoner.

$\boxed{10}$ Skriv opp definisjonen på komplekst linjeintegral. Forklar hva Cauchys integralteorem sier, og regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz$$

der $\mathcal{C}$ er en sirkel med sentrum i z_0 i det komplekse planet og n er et heltall. Skriv opp Cauchys integralformel og forklar hvor den kommer fra.

$\boxed{11}$ Forklar hva residyteoremet sier og hvordan dette kan brukes til å invertere laplacetransformen til et signal.

$\boxed{12}$ Utled Rodrigues formel

$$x' = y\cos\theta + y \times x \sin\theta + x \cdot y(1-\cos\theta)y$$

der x' er x rotert vinkelen θ om enhetsvektoren y.