Hva kommer på eksamen i TMA4111?

På eksamen får du trekke en lapp, og på den står det en av oppgavene under. Du kan velge om du vil gjøre oppgaven på tavlen (anbefales) eller på et stort ark (vi har liggende). Vi setter av tjue minutter til hver kandidat. Eksamen blir avholdt i 417 i Hovedbygningen.

Møt opp fem minutter før tidspunktet du har valgt, og vent på gangen. Jeg (eller en assistent om jeg ikke kan) kommer ut og lar deg trekke to oppgaver, og så får du fem minutter til å trekke pusten og spise en kjeks. Hvis livet ditt passerer i revy når du trekker oppgave, får du trekke en gang på nytt. Det blir kun mulig å trekke en oppgave fra hver kategori.

Eksaminator er Therese Strand og sensor er Magnus Christie Ørke.

1 Fourieromvending

$\boxed{1}$ Fnn fourieromvendingen til $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$$

der $a > 0$. Forklar hva diracpulsen er og regn ut dennes fourieromvending.

$\boxed{2}$ Utled konvolusjonsregneregelen

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\,\mathcal{F}(y)$$

og forklar hvorfor det som kommer ut av et LTI-system er

$$x * h$$

der x er signalet som går inn og h er impulsresponsen. Forklar hva impulsresponsen til et system er og hvorfor fourieromvendingen til impulsresponsen er det samme som frekvensresponsen til systemet.

$\boxed{3}$ Forklar at sannsynlighetstettheten h til den stokastiske variabelen $Z = X + Y$ er

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z-v)\,dv$$

der f og g er sannsynlighetstetthetene til de uavhengige stokastiske variablene X og Y.

$\boxed{4}$ Utled regnereglene
$\mathcal{F}\left\{x(t-\theta)\right\}) = e^{-i\omega\theta}X(\omega)$, $\mathcal{F}\left\{e^{i\theta t}x(t)\right\}) = X(\omega-\theta)$, og $\mathcal{F}\left\{x(at)\right\}) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$\boxed{5}$ Skriv opp definisjonen på fourieromvending, forklar hvordan du får den fra

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2\pi i n t/T}\,dt$$

ved å la $T \to \infty$, og finn fourieromvendingen til

$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$

2 Litt klassisk mekanikk

$\boxed{1}$ Bruk laplaceomvending til å løse initialverdiproblemet

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0,$$

og tegn opp minst to helt forskjellige fysiske systemer som modelleres av denne differensiallikningen.

$\boxed{2}$ En brugde svømmer langs kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 4\pi$$

En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft på brugden gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn det totale arbeidet som gjøres på brugden.

Greg Skomal / NOAA Fisheries Service

3 Mer dobbeltintegral

$\boxed{1}$ Et område D i $\mathbf{x}$-planet er begrenset av $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ og $1 \leq r \leq 2$, der

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta) \\ x_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Regn ut jacobideterminanten

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}$$

og forklar hvorfor arealet av D er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left| \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right| dr d\theta.$$

Regn ut arealet og skisser området i både $\mathbf{x}$-planet og i (r,θ)-planet.

$\boxed{2}$ Regn ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

4 Kjerneregelen

$\boxed{1}$ Et meningsløst vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og et annet ved

$$\mathbf{G}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

Finn jacobimatrisen til $\mathbf{F}(\mathbf{G})$.

$\boxed{2}$ Forklar med utgangspunkt i Taylors andreordens formel hvorfor et kritisk punkt er en minimumspunkt dersom hessematrisen er positivt definitt.

5 Symmetriske matriser

$\boxed{1}$ Vis at dersom en matrise er hermittisk, er egenverdiene reelle og egenvektorene til to distinkte egenverdier ortogonale.

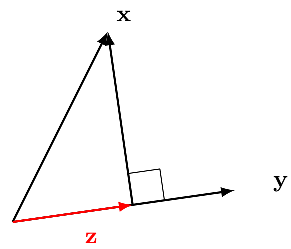
6 Ortogonale matriser

$\boxed{1}$ La $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vis at

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\theta$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, og at projeksjonen $\mathbf{z}$ av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{y}$ er gitt ved

$$\mathbf{z} = P\mathbf{x} \quad \text{der} \quad P = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$$



$\boxed{2}$ Skriv opp definisjonen på skalarproduktet mellom to komplekse vektorer, forklar hvorfor $A^* = A^{-1}$ dersom kolonnene i A er ortonormale, og finn en ortogonal basis for kolonnerommet til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Interpolasjon og regresjon

$\boxed{1}$ Forklar hva normallikningene er og finn regresjonslinjen til punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8 Diskret fourieromvending

$\boxed{1}$ La $x, y \in \mathbb{C}^n$. Vis at

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\overline{y(k)}$$

er et komplekst indreprodukt, og at dersom

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-2\pi ink/N} \qquad \text{er} \qquad x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2\pi ink/N}.$$

9 Optimering

10 Flateintegraler

$\boxed{1}$ En flate er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

der $D \subset \mathbb{R}^2$. Forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

$\boxed{2}$ Vis at overflatearealet til en kule med radius r er $A = 4\pi r^2$.

11 Fluksintegraler

$\boxed{1}$ La flaten $\mathcal{S}$ være parametrisert ved $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Forklar at enhetsnormalvektoren til flaten er gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

og at den totale utstrømmningen til $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gjennom flaten $\mathcal{S}$ er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}\, d\mathbf{x}$$

$\boxed{2}$ Regn ut den elektriske fluksen til en punktladning q plassert i origo gjennom et kuleskall (sentrert i origo) med radius R.

12 Trippelintegraler

$\boxed{1}$ Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

$\boxed{2}$ La $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ være en funksjon fra $D \to \mathbf{R}^3$, der $D \subset \mathbb{R}^3$, og la Ω være bildet av D gjennom $\mathbf{z}$. Forklar at volumet til Ω er

$$\int_\Omega d\mathbf{z} = \int_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| d\mathbf{x}$$

og vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3} r^3$.

13 Vektorkalkulus

$\boxed{1}$ Forklar hva divergensen til et vektorfelt er og hva divergensteoremet sier.

$\boxed{2}$ Forklar hva rotasjonen til et vektorfelt er og hva Stokes' teorem sier.