Hva kommer på eksamen i TMA4101? - LF

Disse LF-ene er skrevet for å være pedagogiske. På eksamen trenger du selvfølgelig ikke skrive slike lange kåserier.

1 - TALL

$\boxed{1}$ Se forelesning uke 34.

$\boxed{2}$ Hva komplekse tall og wesselplanet er, er også forklart i forelesning uke 34. Dersom vi ønsker å dele to komplekse tall på hverandre, er det bare å gange oppe og nede med den kompleks-konjugerte til nevneren:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi-d^2i^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$\boxed{3}$ La $z = a+bi$. Da er $iz = i(a+bi) = -b+ai$. Skalarproduktet mellom (a,b) og $(-b,a)$ er jo helt klart null. Merk at her har du et snedig triks for å finne normalvektoren til en gitt vektor i $\mathbb{R}^2$. Hvis du vil briljere, kan du forklare hvorfor iz er rotert $\pi/2$ mot klokken i forhold til z. (Hint: Eulers formel.)

$\boxed{4}$ En **kropp** F er en algebraisk struktur med to operasjoner, addisjon $(+)$ og og mutliplikasjon $(\cdot)$. Kroppen må være lukket under disse operasjonene, og operasjonene må tilfredsstille følgende aksiomer:

Addisjon

1 Addisjonen er assosiativ: $(x+y)+z = x+(y+z)$

2 Addisjonen er kommutativ: $x+y = y+x$

3 Additiv identitet: Det finnes et element 0 slik at $x+0=x$

4 Additiv invers: For hver x finnes y slik at $x+y=0$

Multiplikasjon

5 Mutliplikasjonen er assositativ: $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

6 Multiplikasjonen er kommutativ: $x\cdot y = y\cdot x$.

7 Multiplikativ identitet: Det finnes et elelement 1 slik at $1\cdot x = x$.

8 Multiplikativ invers: For hver $x \neq 0$ finnes y slik at $x\cdot y = 1$.

Det distributive aksiomet

9 Multiplikasjon er distributivt over addisjon:
$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Merk først at

$$y \cdot x = y \cdot (x + 0) = y \cdot x + y \cdot 0$$

Dersom vi legger til $-y \cdot x$ på begge sider, står vi igjen med

$$0 = y \cdot 0,$$

så det at null ganger noe må være null, følger av aksiomene. Vi kan nå bruke at

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (-1) \\ &= (1 - 1) \cdot (-1) \\ &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= -1 + (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

og konkludere med at -1 og $(-1) \cdot (-1)$ må summere til null. Altså er de hverandres additive invers, og derfor må $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Egentlig burde vi vist at identitets- og inverselementene er entydige, og dessuten burde vi satt opp aksiomene for $=$-tegnet og vært sikker på at alle de algebraiske manipulasjonene er gyldige og et par andre ting, men det får nesten være grenser for hvor mye dere skal plages.

2 - FUNKSJONER

$\boxed{1}$ Denne oppgaven er kanskje mest en unnskyldning for å lære dere å gange ut

$$(a + b)^n$$

for dette er et triks mange ikke kan, og du får bruk for kunnskapen i TMA4245 Statistikk og sannsynlighetsregning til våren. Så her kommer et løsningsforslag som er litt vel pedagogisk, du trenger ikke skrive fullt så mye greier på eksamen. Først må vi ha Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

For eksempel er

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4 \\ &= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} a^1b^3 + \binom{4}{4} b^4 \end{aligned}$$

Symbolet $\binom{n}{r}$ leses "n over r" og det er ikke kjempevanskelig å vise ved induksjon (prøv om du har kapasitet) at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Merk at for alle n er

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{og} \qquad \binom{n}{1} = n$$

slik at

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \right) = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Funksjonen $f : A \to f(A)$ sin inverse funksjon eksisterer dersom f er injektiv, og f^{-1} tilfredsstiller likningen

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

for alle $x \in f(A)$. Hvis vi deriverer denne likningen med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1$$

eller

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Dersom vi setter $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \tan x$ og husker at

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

detter

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan(x)\right)} = \frac{1}{1+x^2}$$

rett ut.

I forrige uke prata jeg med en MTKJ-student som hadde tegnet en aldeles nydelig tegning av dette. Hvis du er flink til å tegne kan du sende meg din beste versjon av figuren. Det vakreste og mest korrekte bidraget får premie.

$\boxed{3}$ Denne klarer alle barn i barnehagen med abc-formelen. Vi beregner

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

slik at

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i).$$

Men jeg har så lyst til at alle skal ha

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

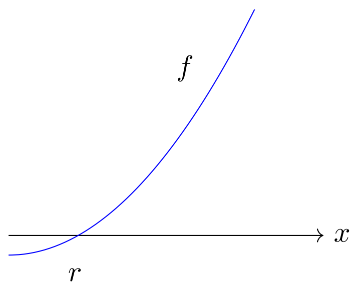
$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

ryggmargen. Polynomlikninger er en viktig del av Norges kulturarv; Niels Henrik Abel var den første som beviste at til tross for at alle polynomer i prinsippet kan spaltes fullstendig i lineære faktorer, finnes det ingen abc-formel for polynomlikninger med høyere orden enn 5.

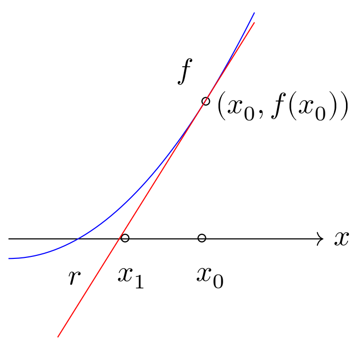
3 - LIKNINGER

$\boxed{1}$ Newtons metode baserer seg på at likningen er skrevet på formen $f(x) = 0$.

1: Den leter altså etter nullpunkter til funksjoner. La oss si at nullpunktet vi leter etter kalles r.



2: La oss anta at vi har en tilnærming x_0 til r. Vi slår tangenten til f i x_0.



3: Punktet der tangenten skjærer x-aksen, kaller vi x_1. Dette punktet kan vi finne ved å sette opp likningen for tangenten til f i x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

og så kreve at $y = 0$:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Løser vi denne likningen for x_1, får vi at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

4: Dersom f og x_0 ser ut slik som i figuren, vil x_1 ligge nærmere nullpunktet enn x_0, og det trengs ikke så stor fantasi for å se at x_2 kanskje vil legge seg nærmere nullpunktet enn x_1. Newtons metode er definert som den rekursive følgen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$\boxed{2}$ Fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

konvergerer av og til mot løsningen r til likningen $x = g(x)$.

Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r, sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r, og vi ser nå hvorfor det er lurt å ha enn viss peiling på hvorvidt $|g| < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjør.

$\boxed{3}$ Her er en kode som kjører begge metoder og printer hver iterasjon. Merk hvor mye kjappere Newtons metode konvergerer.

```python
import numpy as np
x=1
y=1

for i in range(15):
    x=np.cos(x)
    y=y-(y-np.cos(y))/(1+np.sin(y))
    print(x,y)
```

4 - FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER

$\boxed{1}$ Vi har jo vist i at initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = b \qquad x(0) = x_0$$

har entydig løsning. Newtons avkjølingsproblem er

$$\dot{T}(t) + \alpha\,(T(t) - T_K) = 0 \qquad T(0) = T_0,$$

er definitivt et problem som passer i denne tvangstrøyen, så om vi har en løsning, kan vi være helt sikre på at dette er den eneste. Man skriver likningen slik man gjør for å poengtere at **tingens endring i temperatur er proporsjonal med differansen i temperatur mellom tingen og omgivelsene**.

Hvis du setter

$$T(t) = T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t}$$

inn for $T(t)$ likningen, får du

$$-\alpha(T_0 - T_K)e^{-\alpha t} + \alpha\left(T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t} - T_k\right) = 0$$

og dessuten er

$$T(0) = T_K + (T_0 - T_K) = T_0$$

så det ser bra ut.

$\boxed{2}$ Man kan forklare hvordan Eulers eksplisitte metode fungerer på forskjellige måter. Gitre opp t-aksen med en jevn partisjon av gitterpunkter t_n med avstand h. Jeg liker best å ta differensiallikningen

$$\dot{x} = f(x)$$

integrere den mellom to gitterpunkter

$$x\left(t_{n+1}\right) - x(t_n) = \int_{t^n}^{t_{n+1}} \dot{x}(t)\,dt = \int_{t^n}^{t_{n+1}} f(x(t))\,dt$$

og så sette inn approksimasjonene $x_{n+1} \approx x\left(t_{n+1}\right)$ og $x_n \approx x\left(t_n\right)$ på venstre side og disse og en eller annen numerisk approksimasjon for integralet på høyre side. Forskjellige numeriske approksimasjonsteknikker for integralet gir opphav til forskjellige numeriske metoder for differensiallikninger, og Eulers eksplisitte metode får du ved å sette inn en venstre riemannsum med bare ett delintervall

$$x_{n+1} - x_n = hf\left(x_n\right)$$

slik at rekursjonen blir

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(x_n\right).$$

Dersom du har peiling på numerisk integrasjon, blir det nå lett å huske de forskjellige numeriske differensiallikningsløserne, og det blir lett å forstå slike ting som at trapesmetoden

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f\left(x_n\right) + f\left(x_{n+1}\right)\right)$$

er mer presis enn Eulers eksplisitte metode, for trapesregelen er jo en bedre numerisk integrasjonsmetode enn riemannsummer.

Man kan også basere seg på Taylors teorem for $n = 1$. Dersom du har en approksimasjon til $x\left(t_n\right)$ og ønsker en approksimasjon til $x\left(t_{n+1}\right)$, kan du lineærapproksimere om du har tilgang på en approksimasjon til stigningstallet $\dot{x}\left(t_n\right)$. Men siden $\dot{x} = f(x)$ gir differensiallikningen gir deg en tilnærming til stigningstallet via f, så om du lineærapproksimerer deg til x_{n+1} fra x_n blir likningen

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n).$$

Denne strategien regnes som litt lettere å skjønne i begynnelsen, men det blir litt vanskeligere å forstå forholdet mellom de forskjellige metodene. Hvis noen har en pen figur, er jeg interessert, den beste får premie.

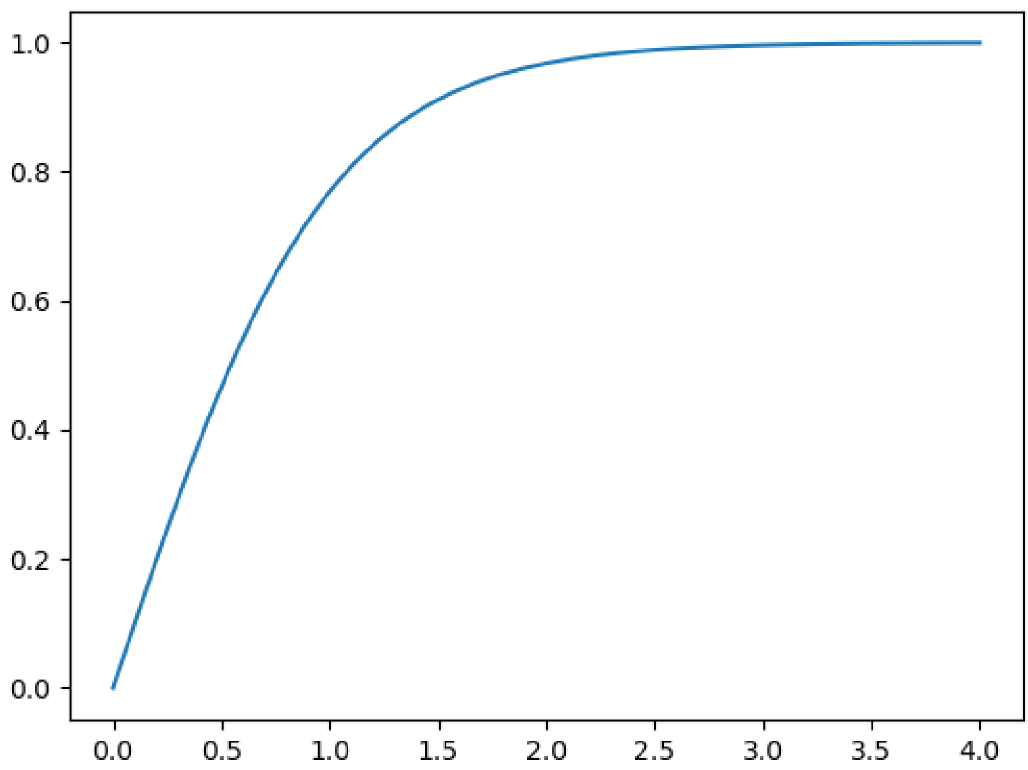
Eulers eksplisitte metodes rekursjonslikning blir

$$v_{n+1} = v_n + h\,(1 - v_n^2)\,.$$

for fallskjermproblemet, og du kan programmere det opp slik:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n=100
T=4
h=T/n

t = np.arange(0.0, (n+1)*h, h)
y=np.zeros(n+1)

for k in range(n):
    y[k+1]=y[k]+h*(1-y[k]**2)

plt.plot(t,y)
plt.savefig("fallskjerm-ekspl.png")
```

Tut og kjør. Plottet blir omtrent slik:



5 - LINEÆRE LIKNINGSSYSTEMER

$\boxed{1}$ Et tredjegradpolynom er et polynom på formen

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

og dersom x-koordinatene er forskjellige i hvert punkt, finnes det et entydig polynom som reiser gjennom de fire punktene. Dette skal vi komme tilbake til senere. Vi får fire likninger:

$$\begin{aligned} p(0) =& a_0 &&= 1 \\ p(1) =& a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &&= 0 \\ p(2) =& 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &&= 1 \\ p(3) =& 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &&= 2 \end{aligned}$$

Den første er jo allerede gausset ferdig, så vi kan like gjerne si

$$\begin{aligned} p(1) =& a_3 + a_2 + a_1 &&= -1 \\ p(2) =& 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 &&= 0 \\ p(3) =& 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 &&= 1 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 18 & 24 & -28 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{array}$$

slik at

$$\begin{aligned} a_1 &= -8/3 \\ a_2 &= (-4 - 3(-8/3))/2 = 2 \\ a_3 &= -1 - (-8/3) - 2 = -1/3 \end{aligned}$$

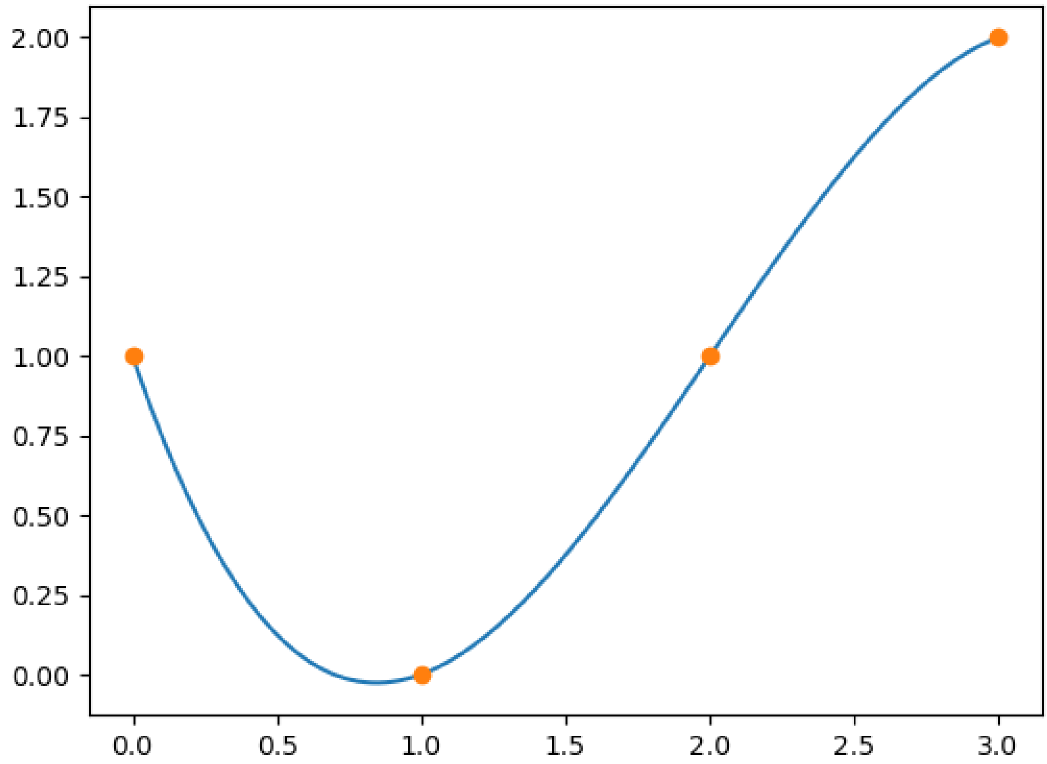
Polynomet blir

$$p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x + 1$$

og denne koden

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


x=np.linspace(0,3, 1000)
y=-x**3/3+2*x**2-8*x/3+1

s=np.linspace(0,3, 4)
z=-s**3/3+2*s**2-8*s/3+1

plt.plot(x,y)
plt.plot(s,z,'o')

plt.savefig('interpolasjon')
```

produserer følgende plot:



$\boxed{2}$ Dersom det lineære likningssystemet er kvadratisk, finnes det en rask måte å sjekke om kolonnene i systemmatrisen er lineært uavhengige. Det kalles determinanten. For en 2×2-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

er den gitt ved

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Vi kjenner igjen dette som arealet av parallellogrammet utspent av kolonnevektorene i A. Dersom denne 2×2-determinanten er null er kolonnene parallelle, og dersom den ikke er null er de ikke parallelle. Siden parallelle vektorer er lineært avhengige (og omvendt så lenge vi bare har to vektorer i kikkerten), har vi egentlig rundet spillet for 2×2-matriser.

For en 3×3-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

er formelen

$$\det A = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

Fulgte du godt med på skolen, kjenner du igjen dette som volumet av parallellepipedet utspent av kolonnene i A. Dersom du tar tre kulepenner og fikler litt med dem, vil du nok klare å se geometrisk at de tre kolonnene er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det A \neq 0$, siden $\det A = 0$ impliserer at de ligger i samme plan.

Dette kan generaliseres til $n \times n$-matriser, men det er ikke helt trivielt. De fleste ingeniører går nok gjennom livet uten å kjenne til denne utledningen. For MTKJ er determinanter veldig viktige, for de er sentrale i kvantekjemi:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Slater_determinant`

6 - MATRISER

$\boxed{1}$ Matriseproduktet AB er en haug med skalarprodukter mellom radene i A og kolonnene i B. Derfor må antall kolonner i A være lik antall rader i B, ellers går det ikke an å utføre alle skalarproduktene.

La nå

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Det første, AB, er ikke definert, siden antall kolonner i A ikke er lik antall rader i B. Det motsatte produktet går bra:

$$BA = \begin{pmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Av samme grunn er det kun kvadratiske matriser som kan ganges med seg selv, så B^2 er ikke definert, mens

$$A^2 = \begin{pmatrix} -38 & 3 & 9 \\ 14 & 11 & 5 \\ -16 & -8 & -36 \end{pmatrix}$$

Summen $A + B$ er ikke definert, for A og B må ha samme dimensjon om du skal kunne addere dem.

$\boxed{2}$ Vi bretter opp ermene og gausser i vei

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

og så ganger vi invers og høyreside for å få løsningen:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

7 - ANDRE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER

$\boxed{1}$ Et stort geni har forstått at eksponensialfunksjonen er egenvektor til differensialoperatoren:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} \qquad \text{osv}$$

og siden venstresiden i likningen

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

er en lineærkombinasjon av slike differensialoperatorer, så vil primater med sunt bondevett gjette at løsningen må være noe med eksponensialfunksjonen. Et annet stort geni har vist at alle løsningene til en linæer differensiallikning av orden n alltid er et vektorrom av orden n [1], så det betyr at dersom du finner to lineært uavhengige løsninger, har du funnet alt som er å finne.

Vi setter $x(t) = e^{\lambda t}$ inn i likningen og får

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} c e^{\lambda t} = 0$$

og siden eksponensialfunksjonen aldri er null, kan vi trygt dele den ut og få

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Denne likningen kan alle barn i barnehagen, og vi vet at

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Dersom $b^2 - 4c$ er positiv, får vi to løsningene

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

der

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Dersom $b^2 = 4c$, får vi løsningene

$$x(t) = (a_1 t + a_2) e^{\lambda t}$$

der $\lambda = -b/2$. Hvis du synes det er litt frustrerende at man bare trekker $te^{\lambda t}$ opp av hatten, kan du prøve å derivere uttrykket

$$x(t) e^{-bt/2}$$

to ganger, bruke at $b^2 = 4c$ og så integrere to ganger, så ser du det. Dersom $b^2 - 4c < 0$ er det vanlig å sette $\delta = -b/2$ og $\omega_0 = 4c - b^2$ og

$$\lambda_1 = \delta + \omega_0 i \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \delta - \omega_0 i$$

slik at

$$x(t) = e^{\delta t} \left(a_1 e^{\omega_0 t} + a_2 e^{-\omega_0 t} \right)$$

som vi vet også kan skrives

$$x(t) = e^{\delta t} \left(a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t) \right)$$

[1] ikke kjempevanskelig å vise, men jeg skal ikke plage dere med det i år

8 - VEKTORROM

$\boxed{1}$ Vi sier at vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

impliserer at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Anta nå at både

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

og

$$d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

Dersom vi trekker disse to likningene fra hverandre, får vi

$$(c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige må

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0$$

slik at

$$c_1 = d_1, c_2 = d_2 = \cdots c_n = d_n.$$

$\boxed{2}$ At punktet har koodinatene $(4, 5, 3)$ i standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, betyr bare at

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Basisskift er ikke noe hokus pokus, vi ønsker å skrive punktet som en lineærkombinasjon av vektorene

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$$

istedet, altså at

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}.$$

Dette er det samme som å løse likningssystemet

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$$

som vi vet løses av $c_1 = -4$, $c_2 = 8$ og $c_3 = -3$. Dette er de nye koordinatene:

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$$