39 - FLUKSINTEGRALER

I forrige uke lærte vi om parametriserte flater. En funksjon $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$ der $D \in \mathbb{R}^2$ tenker vi på som noe som angir en flate i rommet. Bildet av D under $\mathbf{z}$ er selve flaten, og denne punktmengden kalles $\mathcal{S}$. Vi kan summere opp verdiene til en funksjon $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ på flaten $\mathcal{S}$ slik:

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho \, dS = \iint_D \rho(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

Å forstå formelen over er det som er vanskelig med flateintegraler. Har man forstått denne, blir fluksintegraler greit. La oss begynne med noe relatert til flaten.

$\boxed{1}$ Begynn med å lese 15.6 i Adams.

$\boxed{2}$ La flaten være parametrisert ved $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Forklar at de partiellderiverte

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}$$

begge er tangentvektorer til flaten. og at enhetsnormalvektoren til flaten er gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

Tenk at du står ute i en elv med vadebukser og holder en tom ramme under vann eller noe slikt og måler hvor mange liter vann som flyter gjennom rammen per tidsenhet. Vannstrømmen kan modelleres av en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{3}$ Sett at vi har en flate $\mathcal{S}$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{N}$. Tegn og forklar at dersom vannstrømmen er gitt av $\mathbf{F}$, er strømmen gjennom et punkt på flaten (i liter per kvadratmeter eller noe slikt) gitt ved

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$$

og at den totale utstrømmningen gjennom flaten $\mathcal{S}$ (i liter) er

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x} \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

(Merk at vi har litt flaks her. Normaliseringsfaktoren i enhetsnormalvektoren til flaten er jo den samme som arealelementet i flateintegralet, og disse kansellerer på samme måte som de gjorde for linjeintegral over vektorfelt.)

Hvis du har skjønt alt over, kan vi gå over til det som er viktig for elmag, nemlig elektrisk fluks. Coulombfeltet på en fra en punktladning q plassert i origo er:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dersom vektorfeltet i definisjonen av fluksintegral er et elektrisk felt, kalles linjeintegralet **den elektriske fluksen gjennom flaten**.

$\boxed{4}$ Regn ut den elektriske fluksen til en punktladning q plassert i orige gjennom et kuleskall (sentrert i origo) med radius R.

$\boxed{5}$ Hva med fluksen ut gjennom en eller annen sylinder?

$\boxed{6}$ Hva med ut gjennom den triangulære flaten med hjørner $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$?