37 - FLATEINTEGRALER

I denne uken skal vi se på flater i rommet. Når man skal skjønne noe av funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er det fornuftig å ha den riktige visualiseringen. Du vet at en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ gitt ved

$$z = f(x, y)$$

kan visualiseres som en flate i rommet. Man tenker på det som et hus, der (x, y) angir en koordinat i husets gulv, og så gir f takhøyden i dette punktet.

Likningen

$$z = f(x, y)$$

er en likningen med tre variable som er løst for den ene variabelen z. Flater i rommet kan ofte beskrives ved slike likninger, men de trenger jo ikke være løst for den ene variabelen.

$\boxed{1}$ Finn likningen for en kule med radius R og sentrum i (x_0, y_0, z_0).

En mer generell måte å beskrive flater i rommet på, er ved hjelp av funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$. Dersom vi har en slik funksjon til å beskrive flaten, sier vi at flaten er parametrisert. Dette er analogt til kurver i planet. Både $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$y = f(x)$$

og $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t))$$

beskriver kurver i planet, men funksjonstypene oppfører seg forskjellig. (Du kan for eksempel ikke beskrive en kurve som krysser seg selv med en likning på formen $y = f(x)$.)

$\boxed{2}$ En funksjon $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\begin{aligned} x(\theta, \phi) &= \cos\theta \sin\phi \\ y(\theta, \phi) &= \sin\theta \sin\phi \\ z(\theta, \phi) &= \cos\phi \end{aligned}$$

Finn ut hva slags type flate det er.

Nå skal vi se på hvordan vi regner ut overflatearealet til en parametrisert flate.

$\boxed{3}$ En flate er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Les kap. 15.5 i Adams og forklar hvorfor arealet av en bitte liten bit av denne flaten blir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|$$

Se også her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_surface`

$\boxed{4}$ Finn overflatearealet til enhetskulen.

Analogt til linjeintegral, definerer vi flateintegral over skalarfelt som

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_D f(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| dA$$

der $\mathcal{S}$ er flaten parametrisert av $\mathbf{z}$ og D definisjonsmengden til $\mathbf{z}$. Du bør tenke på f som massetetthet målt i masse per arealenhet, og på flateintegralet som den totale massen til flaten $\mathcal{S}$ gitt denne massetettheten.

$\boxed{5}$ Hva veier en ting formet som enhetskuleskallet og har massetetthet gitt ved $f(\mathbf{z}) = 1 + z_3$?

En ting som er greit med flateintegraler, er at om man har skjønt dette, blir det enkelt å skjønne koordinatskift i dobbeltintegraler. Du kan tenke på de originale koordinatene som definisjonsmengden til parametriseringen for flaten, og på de nye koordinatene som en flate med $z_3 = 0$.

$\boxed{6}$ Bruk dette til å forklare hvorfor arealelementet er $r dr d\theta$ i polarkoordinater.

Ukens nøtt

$\boxed{7}$ Massesenteret til en todimensjonal ting med masstetthet ρ er definert som

$$m_x = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x\rho \, dS}{\iint_{\mathcal{S}} \rho dS}$$

osv. Finn massesenteret til et kakestykke med radius R, uniform tetthet og vinkelutslag 2α.