30 - LITT KLASSISK MEKANIKK

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme. Maxwell formulerte dette som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til denne pene formen:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

noen år etter Maxwells originale publikasjon. Likningene kalles henholdsvis Gauss' lov, Faradays induksjonslov, Gauss' lov for magnetisme og Amperes lov. Dette er et koblet sett med differensiallikninger, der

- $\mathbf{E}$ er det elektriske feltet
- $\mathbf{B}$ er det magnetiske feltet
- c er lyshastigheten i vakuum
- ρ er ladningstetthet i rommet
- ϵ_0 er permittiviteten i vakuum
- $\mathbf{J}$ er en gitt strømtetthet i rommet

Likningene kan også skrives på integralform:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} \\
\iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot dS &= 0 \\
\int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot dS \\
c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot dS
\end{aligned}$$

På denne siden er det mange nye symboler. Målet vært å forstå matematisk fysikk, og da må vi skjønne hva alle disse symbolene betyr. Dette er et stort arbeid, og nå skal vi begynne på det. På menyen står klassisk mekanikk, kvantemekanikk, elektromagnetisme, bølgefysikk og andre ting.

VI begynner med litt klassisk mekanikk. Deterministiske fysiske problemer er som regel beskrevet av differensiallikninger, og det finnes mange matematiske teknikker for å analysere disse. Dersom likningen er lineær og tidsinvariant, er laplacetransform et nyttig verktøy. I forrige uke har vi sett at impulsresponsen, altså løsningen h til

$$Lh = \delta,$$

er av spesiell interesse, siden diracpulsen er en superposisjon av like mengder av absolutt alle frekvenser. Dette kan vi bruke til mer enn bare elektroteknikk.

$\boxed{1}$ Bruk laplacetransform til å løse initialverdiproblemet

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0,$$

og tegn opp minst to helt forskjellige fysiske systemer som modelleres av denne differensiallikningen. (Hvis du kommer på noe annet enn RLC-krets og støtdemperen på en bil, må du gi meg beskjed.)

I oppgaven over fant du impulsresponsen. Nå kommer et viktig poeng om lineære og tidsinvariante systemer.

$\boxed{2}$ Bruk laplacetransform til å løse initialverdiproblemet

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-2) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0,$$

og plott denne og løsningen på forrige oppgave i samme figur. Hva ser du?

Det første vi skal spinne videre på, er funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$. Mange fysiske prosesser lar seg beskrive av slike funksjoner. Vi begynner med en rask repetisjon. Vi skriver slike funksjoner som kolonnevektorer:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Vi deriverer dem slik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} \\ \frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} \\ \vdots \\ \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

og finner buelengden ved å integrere banefarten $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$:

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt$$

Enhetstangentvektoren er

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}$$

og enhetsnormalvektoren er

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}$$

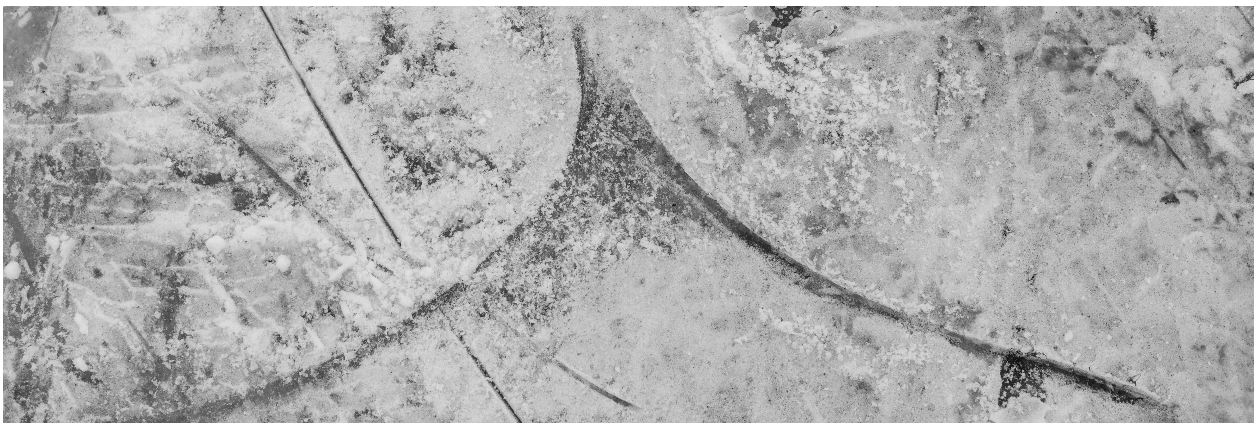
Størrelsen

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}$$

kalles kurvens krumning. I $\mathbb{R}^3$ er det i tillegg en vektor vi kaller binormalvektoren:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Denne står som du ser normalt på både tangentvektoren og normalvektoren. Vi får se hva vi gjør av denne etterhvert. Glatthet for funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ er som kjent noe subtilt. Dette kan du fundere på neste gang du går på skøyter.



$\boxed{3}$ Skrått kast uten luftmotstand. Vi kaster en stein. Finn en funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ som beskriver steinens korrekte trajektorie gitt at tyngdekraften er eneste kraft etter steinen har forlatt hånden og at startposisjonen er gitt ved

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og at startfarten er gitt ved

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

(Hint: Dette lærte du tidlig på gymnaset. Bruk bevegelseslikningene i hver koordinatretning.)

$\boxed{4}$ Skrått kast med luftmotstand. La oss si at du kaster en ball fra origo med startfarten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og at ballen kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Vis at dersom luftmotstanden antas å avhenge lineært med farten (dette er greit dersom farten er lav), blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -a\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -a\dot{x}_2 - mg \end{aligned}$$

der m er massen til ballen, a er proporsjonalitetskonstanten og g er tyngdeakselerasjonen. Løs på en eller annen måte, og plot ballens trajektorie. (Laplacetransform er sikkert fint.)

I fysikk skriver man gjerne

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{x} + y(t) \cdot \hat{y} + z(t) \cdot \hat{z}$$

Oversatt til matrisenotasjonen vi bruker blir dette

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}}$$

men vi må nesten skrive det på matriseform med nummererte koordinater, for ellers klarer vi ikke bruker vår fortreffelige kunnskap om matriseregning til å sette opp enkle og systematiske regler for derivasjon og integrasjon av funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{5}$ La oss si at du spiller golf. Ballen ligger i ro i origo, og så får den en impuls rettet $\pi/4$ radianer oppover. Ballen er fremdeles kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Vis at systemet blir

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t) \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t) - mg \end{aligned}$$

og løs. Her tror jeg nesten du må bruke laplacetransform.

Hvordan skal vi tenke på diracpulsen i mekanikkproblemer? La oss for enkelhets skyld fikle litt med dette i én romlig dimensjon. Newtons andre lov sier at

$$\frac{d}{dt}mv = F$$

altså at den momentane endringen i moment skal være lik den påtrykte kraften. Dersom vi integrerer denne likningen, får vi

$$m(t)v(t) - m(0)v(0) = \int_0^t F$$

altså at endring i moment over et tidsrom skal være lik kraften summert over tidsrommet kraften har virket. [1] En kraftimpuls er en enorm kraft som virker over et meget kort tidsintervall, så hvis du glaner litt på likningen over, vil du kanskje gå med på at du kan tenke på impuls som noe som fra det ene øyeblikk til det andre gir en bestemt endring i moment. Regneeksemplene over er laget for å illustrere dette. I det ene hadde ballen en gitt startfart, mens i det andre ble ballen utsatt for en impuls. Løsningen ble den samme.

Men nå er vi kommet til et viktig punkt i den matematiske fysikken, nemlig det at kraft kan integreres på to forskjellige måter - med hensyn på tid og med hensyn på strekning. Kraft integrert over et tidsintervall gir en impuls, altså endring i bevegelsesmengde. Men kraft integrert over strekning gir arbeid, altså endring i energi.

Nå skal vi introdusere et veldig viktig integral. Fra videregående husker du kanskje at arbeidet W er gitt ved

$$W = Fs$$

der F er en konstant kraft og s er strekningen. Dersom du for eksempel flytter en ting to meter bort med en kraft på tre Newton, har du tilført seks Joule med energi. Dersom det ikke finnes friksjon og bevegelsen er ortogonalt på tyngden, vil tingen nå ha disse seks Joulene som kinetisk energi, og dersom det finnes friksjon, er antagelig disse seks joulene forsvunnet i varme og ødeleggelser.

Men nå skal vi komme et knepp videre. To sentrale spørsmålet er: Hva om kraften varierer med tiden? Hva om vinkelen mellom kraften og bevegelsesretningen varierer med tiden? Svaret er selvsagt integrasjon.

[1] På videregående skole antok du at kraften var konstant, og ganget med tiden kraften hadde stått på.

I forrige semester var vi i prinsippet innom alt vi trenger for å regne ut arbeid, så la oss begynne med å repetere linjeintegral. Dersom du husker dette, kan du hoppe over denne siden.

Buelengden til en kurve Γ finner du ved å integrere speedometerfarten

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\, dt$$

der $\mathbf{x}$ er en parametrisering av Γ, med endepunkter $\mathbf{x}(a)$ og $\mathbf{x}(b)$. Hvis du har to forskjellige parametriseringer for den samme kurven, får integralet den samme verdien. En av de tingene som gjør funksjoner av flere variable komplisert, er at det blir et forvirrende antall forskjellige integraltyper å holde styr på. La oss si at en brugde svømmer langs en trajektorie parametrisert ved $\mathbf{x}$, og at planktontettheten i vannet langs kurven er gitt ved $f(\mathbf{x})$.

$\boxed{6}$ Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at det brugden spiser på en infinitesimal bit av kurven er gitt ved

$$f(\mathbf{x}(t))\, \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\, dt$$

Brugdens totale måltid blir

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\, \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\, dt$$

Dette kalles linjeintegralet til f over Γ. Merk at $t \to f(\mathbf{x}(t))$ er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + x_1 x_2.$$

Hvor mye plankton spiser brugden på en runde rundt?

$\boxed{8}$ Brugden svømmer en runde rundt en ellipse med halvakser 3 og 4, sentrert i origo. Hvor mye spiser den på denne turen?
(Hint: du må nok til med python her.)

Du kan også tenke at f er taket i en hytte, og at du har satt opp en vegg langs med kurven Γ. I så fall blir linjeintegralet veggens totale areal.

La oss holde oss i $\mathbb{R}^3$ for enkelhets skyld, og la oss si at en partikkel som reiser langs kurven Γ, parametrisert av $\mathbf{x}$ reiser rundt i et kraftfelt $\mathbf{F}$.

- Trajektorien er en funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Trajektoriens enhetstangentvektor
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}(t)}}{\|\mathbf{x}(t)\|}$$
er en funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Kraften er en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- Kraftens komponent $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}(t))$ i fartsretningen er en funksjon $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i likhet med $f(\mathbf{x}(t))$ i definisjonen av linjeintegral over
- Arbeidet $\mathbf{F}$ gjør på en partikkel som reiser langs Γ er gitt ved linjeintegralet
$$W = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)\, dt$$

Det siste punktet er ikke helt innlysende, men ukens oppgave for deg er å venne deg til det. Senere skal vi se mer på hvorfor denne definisjonen av arbeid er den korrekte.

$\boxed{\text{:-)}}$ Funder litt på dette.

Fysikerne skriver det slik:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$\boxed{9}$ En brugde svømmer langs kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft på brugden gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn det totale arbeidet som gjøres på brugden.

Greg Skomal / NOAA Fisheries Service

For å løse noen mer realistiske fysiske problemer, må vi nesten til med numeriske metoder og litt mer klassisk mekanikk. For å bestemme bevegelsen til en punktpartikkel i n dimensjoner er det alltid $2n$ størrelser som er nødvendige å ta med - de tre koordinatene for posisjon og de tre for fart. Det er vanlig å kalle posisjonen for $\mathbf{q}$ og farten for $\mathbf{p}$. [2]
`https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_system`
Størrelsene $\mathbf{q}$ og $\mathbf{p}$ kalles gjerne henholdsvis generalisert koordinat og generalisert moment, siden det ikke alltid er for eksempel posisjon som er den mest hensiktsmessige avhengige variabelen. Posisjonen til en pendel er (gitt at koordinatsystemet har positiv y-akse nedover)

$$\mathbf{x}(\theta) = \begin{pmatrix} l\cos\theta \\ l\sin\theta \end{pmatrix}$$

men bevegelsen er i bunn og grunn endimensjonal, og det er θ som er den mest praktiske uavhengige variabelen, og differensiallikningen kan skrives

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0.$$

Innføring av generaliserte koordinater og påfølgende omskriving til system gir

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l}\sin q \end{aligned}$$

Dersom vi har luftmotstand som avhenger kvadratisk av farten, får vi systemet

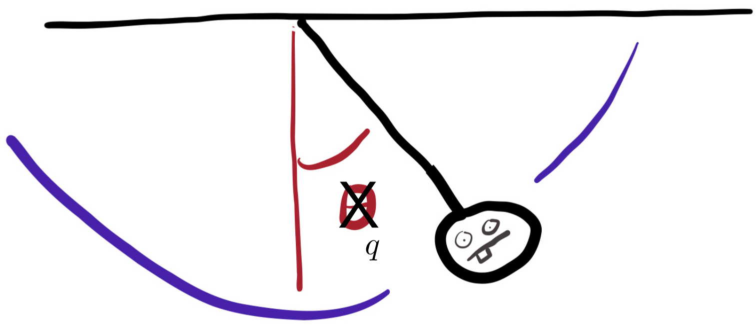
$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l}\sin q - ap|p| \end{aligned}$$

der a er en konstant som avhenger av l og formen på pendelen.

$\boxed{10}$ Løs numerisk med og uten luftmotstand, plott i samme figur, og uttal deg om energitapet. Sammenlikne eksplisitt og symplektisk euler.

$\boxed{11}$ Når farten blir lav nok, blir visst luftmotstanden lineær. Leder dette til raskere eller treigere energitap (enn kvadratisk) ved lave hastigheter?

$\boxed{12}$ I væske med turbulens går den visst som farten kubert. Kan du bruke alt dette til å gjette på hvorfor en bordtennisball går i kurvet bane når den skrur? (Hint: begynn med å google hva som skaper løftet over en flyvinge.)



[2] Dette skyldes antagelig at p vanligvis betyr moment, og at q er bokstaven før p i alfabetet.

$\boxed{13}$ La oss spille litt mer golf. Ballen ligger i ro i origo, og så får den en impuls rettet $\pi/4$ radianer oppover. Ballen er fremdeles kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden, men nå er luftmotstanden kvadratisk med banefarten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)`
Friksjonskraften bllir

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}) = -a\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\mathbf{T} = \dot{\mathbf{x}}\|\dot{\mathbf{x}}\|$$

slik at

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| - g \end{aligned}$$

Løs numerisk, og estimer arbeidet luftmotstanden gjør på ballen under reisen.
(Hint: hvis du klarte begge golfoppgavene over, klarer du nok å oversette diracpulsen til initialverdier.)

$\boxed{14}$ Det kan være vind også. La oss gå videre til tre dimensjoner, og sette på den konstante vindretningen $\mathbf{y}$. Forklar at dersom $y_3 = 0$ (vind går som regel nogenlunde parallelt med bakken) blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a(\dot{x}_1(t) - y_1)\|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}\| \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a(\dot{x}_2(t) - y_2)\|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}\| \\ m\ddot{x}_3(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_3(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}\| - g \end{aligned}$$

Løs numerisk, og se hvor ballen lander for forskjellige vindretninger.

$\boxed{15}$ Vis at krumningsradien til en vektorfunksjon $\mathbf{x}$ kan skrives

$$R(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}{|\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)|}.$$

(Vanskelig.)

LITTERATUR

Funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ er vel best å lese i kap. 8 og 11 i Adams. Linjeintegral finner du i kap. 15, men jeg liker kanskje best kap. 3 i Tom Lindstrøms bok om flervariabel kalkulus.

Klassisk mekanikk lærte jeg i et kurs på Universitetet i Bergen. Oppgavene var så vanskelige at man regnet at kurset egentlig var dobbel arbeidsmengde. Det var absolutt ikke meningen at noen skulle få til oppgavene i oppgavesamlingen, men Alf Øien regnet gjennom alt for oss (han var pensjonist, og den eneste på instituttet som fikk til alle oppgavene), og vi kom oss gjennom eksamen på et merkelig vis. Jeg har sendt epost til Alf og etterspurt kompendiet som ble brukt, men Alf pensjonerte seg i 2005 og jeg vet ikke om han leser epost så ofte.