TMA4101/4106/4111/4121

22 - KOMPLEKSE INDREPRODUKTROM

For to uker siden intoduserte vi transponeringsoperasjonen, som er å bytte om på rader og kolonner i en matrise. Dersom tallene i matrisen er komplekse, viser det seg at det er lurt å komplekskonjugere alt i tillegg til å transponere. La

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

være en $m \times n$-matrise. Den **adjungerte** av A er $n \times m$-matrisen

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ Finn den adjungerte til

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$$

Merk at nå har vi en ny notasjon for $\overline{z}$, nemlig z^*. Du lurer sikkert på hvorfor vi komplekskonjugerer i tillegg til å transponere. Det er fordi de kartesiske koordinatene til z^*w har en mer interessant geometrisk tolking enn de kartesiske koordinatene til zw.

$\boxed{2}$ La z og w være komplekse tall, med $|w| = 1$. Tegn dem inn i det komplekse planet, skriv det komplekse tallet

$$w^*z$$

på kartesisk form, og merk av real- og imaginærdelen til denne samme figur.
(Hint: Dette er en kompleks variant av oppgave 20 - 3.)

Siden $\overline{z}w$ inneholder informasjon om projeksjonen av w på z, og lengden av et komplekst tall er

$$|z| = \sqrt{z^* z},$$

definerer vi **det komplekse skalarproduktet** mellom komplekse kolonnevektorer $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ som

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^* \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \cdots & \overline{z}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \overline{z}_1 w_1 + \overline{z}_2 w_2 + \cdots + \overline{z}_n w_n$$

Vi sier at vektorer i $\mathbb{C}^n$ er ortogonale dersom det komplekse skalarproduktet mellom dem er null, og lengden til en kompleks vektor $\mathbf{z}$ defineres som

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^* \mathbf{z}}$$

Det komplekse skalarproduktet er noe mer kompliserte å forholde seg til enn det reelle. Den første forskjellen er at Pytagoras' setning kun har enveis implikasjon:

hvis $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale, er $\|\mathbf{z} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$

Beregningen

$$\|\mathbf{z} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{z} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{z}\|^2 + \mathbf{z}^* \mathbf{w} + \mathbf{w}^* \mathbf{z} + \|\mathbf{w}\|^2.$$

er fremdeles gyldig, men siden vi ikke uten videre kan bytte plass på faktorene i det komplekse skalarproduktet, kan vi ikke slå sammen de to midterste leddene, og disse kan kansellere på andre måter enn at $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale.

$\boxed{3}$ Finn et eksempel på $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ slik at

$$\mathbf{z}^* \mathbf{w} + \mathbf{w}^* \mathbf{z} = 0$$

uten at $\mathbf{z}^* \mathbf{w} = 0$.

Dersom $\mathbf{z}^* \mathbf{w} = 0$ er også $\mathbf{w}^* \mathbf{z} = 0$,

$\boxed{4}$ vis dette

og dette betyr at dersom $\mathbf{z}^* \mathbf{w} = 0$, får vi

$$\|\mathbf{z} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2.$$

$\boxed{5}$ Denne kommer på eksamen.

Cauchy-Schwarz og trekantulikheten gjelder også i det komplekse tilfellet, men jeg skal ikke plage deg med bevisene. Det jeg derimot må plage deg med, er et gjensyn med

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \text{og} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}\,dt$$

Du lurte forhåpentligvis på hvor minusen i eksponensialfunksjonen kom fra. Forhåpentligvis skjønner du også nå at formelen for fourierkoeffisientene c_n er et indreprodukt, men den er altså et **komplekst indreprodukt**. Her er aksiomene. Et komplekst indreproduktet er konjugert symmetrisk:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \overline{(\mathbf{w}, \mathbf{z})}$$

positivt definitt:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

og lineært i enten første eller andre faktor, altså enten

$$(a\mathbf{z} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad \text{eller} \qquad (\mathbf{z}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

$\boxed{6}$ Sjekk at det komplekse skalarproduktet er et indreprodukt, lineært i andre faktor.

$\boxed{7}$ Sjekk at

$$(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

er det indreprodukt, lineært i første faktor.

$\boxed{8}$ Sjekk at dersom et komplekst indreprodukt er lineært i den ene faktoren, er det **antilineært** i den andre. Altså at dersom for eksempel

$$(a\mathbf{z} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad \text{er} \qquad (\mathbf{z}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = \overline{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \overline{b}(\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

I oppgave 17 - 12 "utledet" du koeffisentene

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}\,dt$$

ved å observere at de komplekse eksponensialfunksjonene er ortogonale, og så bruke essensielt det samme resonnementet som i oppgave 20 - 11.

$\boxed{9}$ Nå er det antagelig lurt å gjøre dette resonnementet på nytt, for det er viktig, og kommer på eksamen. Du må også være sikker på at du forstår likheten mellom 17 - 12 og 20 - 11.

Ved første øyekast virker det kronglete med ubestemmeligheten angående hvorvidt indreproduktet skal være lineært i første eller andre faktor. Men det finnes mange indreprodukter, og i forskjellige fagfelt opererer man med forskjellige konvensjoner, så det er like greit å venne seg til begge varianter. Komplekse vektorer kan være ortonormale på samme måte som reelle vektorer, men en matrise med ortonormale kolonner kalles **unitær**.

$\boxed{10}$ Vis at for en unitær matrise Q er

$$Q^*Q = I = QQ^*$$

og sjekk at

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

er unitær.

Parsevals sats gjelder også i komplekse indreproduktrom, og beviset er så og si identisk.

$\boxed{10}$ Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \qquad \text{er} \qquad (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k}.$$

Parsevals sats gjelder også for fourierrekker, men akkurat som for utledningen av formelen for koeffisientene, må vi nøye oss med heuristisk utledning. Den er basert på samme triks som i oppgave 10, men vi må gjøre noen bytter av uendelig sum og integraltegn som vi strengt tatt ikke vet om går bra, og derfor skal vi nøye oss med selve resultatet. Dersom et signal kan skrives

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/T} \qquad \text{med} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-int}\, dt$$

er

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Vi trenger faktisk ikke noe mer enn at x er riemannintegrerbar for at dette skal være sant. Parsevals sats gjelder også for fourieromvending, men da heter det Plancherels likning:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Plancherel_theorem`
og den sier at

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega)\overline{\widehat{y}(\omega)}\, d\omega$$

KRASJKURS I KVATERNIONER

Et kvaternion ser slik ut

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k$$

der de imaginære enhetene i, j og k tilfredsstiller

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Jeg har nettopp oppdaget kvaternioner, og derfor er det selvfølgelig gøy. Realdelen x_0 kalles **skalar-delen**, mens imaginærdelen $z_1 i + z_2 j + z_3 k$ kalles **vektordelen**. Grunnen blir klar om litt.

$\boxed{1}$ Utled regnereglene

$$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

Likner dette på noe du har lært på gymnaset?
(Hint: du bør ha kryssproduktet, høyrehåndsregelen og standardbasisen i $\mathbb{R}^3$ i bakhodet.)

Vi konjugerer kvaternioner akkurat som vi konjugerer komplekse tall:

$$\overline{z} = z^* = z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k$$

$\boxed{2}$ Regn ut $z\overline{z}$ og $\overline{z}z$.

Dette kan brukes til å definere absoluttverdi $\sqrt{\overline{z}z}$, samt finne invers. Kvaternionene $\mathbb{H}$ er ikke en kropp, men det er ikke den multiplikative inversen som er problemet.

$\boxed{3}$ La

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k \qquad \text{og} \qquad z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k)$$

Vis at $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

Jeg foretrekker vanligvis å begynne indeksering fra en og ikke null, men akkurat for kvaternioner er det en fordel å begynne på null. [1] Grunnen er at man i anvendelser ofte er interessert i å tenke på imaginærdelen som et punkt i $\mathbb{R}^3$. Regnereglene for de imaginære enhetene i, j og k illustrerer nemlig hvorfor vi i gamle dager når jeg var ung og flott skrev

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasisen i $\mathbb{R}^3$, og

$$\mathbf{z} = z_1 \mathbf{i} + z_2 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k}$$

for vektorer i $\mathbb{R}^3$. Denne notasjonen er nå gått av moten, og det er i bunn og grunn synd, for hvis man skriver alt slik, kan man bruke høyrehåndsregelen til å huske formelen for kryssprodukt.

[1] Det er et mysterium hvorfor alle programmeringsspråk insisterer på å indeksere fra 0 istedet for 1. Hvis du har en vektor med tre elementer, er det mer naturlig å kalle dem $x[1]$, $x[2]$ og $x[3]$ enn $x[0]$, $x[1]$ og $x[2]$, og skriver du for i in range(n) må du huske på at denne går fra 0 til n-1, ikke fra 1 til n:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Off-by-one_error`

$\boxed{4}$ La

$$z = z_1 i + z_2 j + z_3 k$$

og

$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

og lag en pen formel for $\bar{z}w$.

Produktet mellom to kvaternioner kommuterer ikke. Dette er litt awkward i begynnelsen.

$\boxed{5}$ Regn ut

$$zw = (z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)(w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

og

$$wz = (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)(z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)$$

og forklar hvorfor ikke $\mathbb{H}$ er en kropp.

UKENS NØTT

Ekte mannfolk bruker kvaternioner når de skal holde styr på rotasjoner:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation`
og dette er standardmåten å gjøre det på i moderne robotstyringsalgoritmer. Dersom du ønsker å rotere $x \in \mathbb{R}^3$ om y der $\|y\| = 1$, kan du lage

$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

og

$$y = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y_1 i + y_2 j + y_3 k)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

og beregne yxy^{-1}; imaginærdelene til denne gir deg den roterte vektoren.

$\boxed{1}$ Vis dette.
(Hint: brett opp ermene og regn i vei. Tok meg om lag en uke, men jeg er heller ikke spesielt smart. Du er nok helt avhengig av å ha fått til oppgave 13 i forrige økt.)