21 - REELLE INDREPRODUKTROM

I forrige uke studerte vi en matrise A med ortogonale kolonner, og vi oppdaget systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

enkelt kunne løses ved å redusere til et diagonalt system ved å gange med A^T fra venstre:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

og så invertere diagonalmatrisen på venstre side, slik at

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Her har vi regnet ut at punktet med koordinater $(-1, 0-7)$ i standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ har koordinater $(3, -2-2)$ i den ortogonale basisen gitt ved kolonnene i A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ Mer generelt gjelder at

$$\mathbf{x} = \sum_k \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$$

dersom $\mathbf{x}$ ligger i rommet utspent av de ortogonale vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$. Hvis du ikke ser at dette er "det samme", kan du prøve å regne ut $\mathbf{c}$ i eksemplet over ved denne formelen. Hvis det er innlysende for deg at det er det samme, kan du går videre.

Vi viste formelen

$$\mathbf{x} = \sum_k \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$$

ved å anta

$$\mathbf{x} = \sum_k c_k \mathbf{v}_k,$$

ta skalarproduktet med $\mathbf{v}_m$ på hver side og bruke ortogonaliteten, slik at

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_m = c_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m.$$

Repeterer man dette for alle m får man formelen over.

$\boxed{2}$ Du har i bunn og grunn gjort det samme resonnementet i økt 17. Gå tilbake og finn det.

For at det skal komme enda tydeligere frem hvor dette bærer, kan du

$\boxed{3}$ regne ut

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt \quad \text{og} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\cos(nt)\,dt \quad \text{og} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt$$

for alle $m, n \in \mathbb{N}$

og vise at

$\boxed{4}$ dersom

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

er

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt$$

Et vektorrom kan være utstyrt med noe som kalles **indreprodukt**. Dette er noe som tar inn to vektorer og gir ut et tall som forteller noe interessant om forholdet mellom dem, og det finnes selvfølgelig aksiomer. La $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ være vektorer, og a og b relle tall. Et indreprodukt er **symmetrisk**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

positivt definitt:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

og **lineært i første faktor**:

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

La oss begynne med en litt traust og kjedelig konsekvens:

$\boxed{5}$ Vis at indreproduktet er lineært også i andre faktor.

De to mest elementære indreproduktene er

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

og

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)\, dt$$

der x og y er funksjoner fra $[a, b]$ til $\mathbb{R}$. Inntil videre er det disse to vi trenger, men det finnes mange andre indreprodukter. Dette kommer vil tilbake til.

$\boxed{6}$ Vis at disse er reelle indreprodukter.

Indreproduktet er en generalisering av skalarproduktet. Vi skriver likeledes $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, og sier at vektorer er ortogonale dersom indreproduktet mellom dem er null. Det viser seg at mange av tingene vi utledet i forrige uke, kan utledes bare med de tre aksiomene over. I forrige uke skrev vi opp skalarproduktet i $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2$$

og utledet Pytagoras' setning, som sier at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ortogonale hvis og bare hvis

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

$\boxed{6}$ Utled denne på nytt, men bruk bare aksiomene for indreprodukt.

Følgende oppgave har du allerede gjort for skalarprodukt, men vi gjør den med abstrakt indreprodukt óg, for å komme inn i tankegangen og notasjonen og så videre.

$\boxed{7}$ Bruk likeledes aksiomene for indreprodukt til å vise at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortogonal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \qquad \text{er} \qquad c_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)}.$$

Når du i økt 17 ønsket å skrive $x(t)x$ som en uendelig sum av sinusfunksjoner, gjorde du i prinsippet samme beregning som i oppgaven over. Du utledet først at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = \begin{cases} \pi/2 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

for alle $n, m \in \mathbb{N}$, og så brukte du dette da du ganget

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

med $\sin mt$ og integrerte fra $-\pi$ til π. Forskjellen er at vektorrommet av alle sinusfunksjoner har uendelig mange dimensjoner, og da er det noen ting som blir litt vanskeligere. Dette illustrerer forskjellen på stringente og heuristiske bevis - oppgave 7 går greit å få til med den verktøykassen du har, mens i utledningen av fourierkoeffisientene må vi nøye oss med å "skjønne ideen". Se ukens nøtter om du er nysgjerrig.

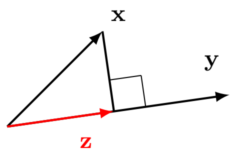
Dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortogonal vektormengde og i tillegg $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ for alle k, sier vi at vektormengden er **ortonormal**. Pytagoras' regel kan skrives opp på en litt annen måte, og da kalles den gjerne **Parsevals sats**:

$\boxed{8}$ Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \qquad \text{er} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

og tegn en figur som illustrerer denne i $\mathbb{R}^2$.

Indreproduktet $(\mathbf{y},\mathbf{x})$ forteller som sagt noe om $\mathbf{x}$ sin komponent i retningen til $\mathbf{y}$. La oss si at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i figuren over er en basis for et rom, og så vil du ha en ortogonal basis for det samme rommet. Da kan du rette ut $\mathbf{x}$ litt.



$\boxed{9}$ Tegn vektoren

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\mathbf{y}$$

inn i figuren over og vis at denne er ortogonal på $\mathbf{y}$.

Ideen over er grunnlaget for noe som kalles Gram-Schmidts metode:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process`
Dette er en smart teknikk for å skaffe seg en ortogonal basis dersom basisen man har ikke er det.

$\boxed{10}$ Finn en ortogonal basis for kolonnerommet til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvis du er barsk, kan du skrive en pythonrutine for dette.

$\boxed{11}$ Gram-Schmidt polynomene $\{1, x, x^2, \cdots\}$. Dersom du gjør det riktig, skal du få ut legendrepolynomene:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials`
Disse får vi bruk for senere i semesteret.

Vi sier forvirrende nok at en matrise er ortogonal dersom kolonnene er ortonormale:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_matrix`
Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

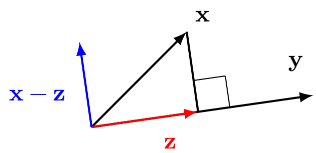
har ikke ortonormale kolonner, men om du skalerer dem litt, får du en ortonormal matrise:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{12}$ Hva skjer om du ganger B med B^T?

Helt riktig, for ortogonale matriser er $B^{-1} = B^T$. Ortogonale matriser roterer vektorer:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix`
og mengden av alle ortogonale $n \times n$-matriser kalles den **spesielle ortogonale gruppen**, $SO(n)$. Dette er et eksempel på noe som kalles en Lie-gruppe, etter den norske matematikeren Sophus Lie: [1]
`https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie`

$\boxed{13}$ Skriv en pythonrutine som roterer $x \in \mathbb{R}^3$ θ radianer om y.
(Hint: Projiser x på y, lag en gunstig ortonormal basis og bruk todimensjonal rotasjon.)

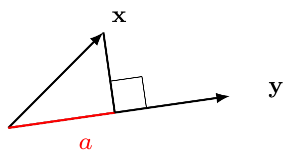


UKENS NØTTER

I forrige uke utledet du Cauchy-Schwarz' ulikhet

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

basert på det geometrisk åpenbare at $|a| \leq \|\mathbf{x}\|$ i denne figuren:



$\boxed{1}$ Cauchy-Schwarz gjelder i generelle indreproduktrom, men det er litt mer jobb å vise. Prøv.

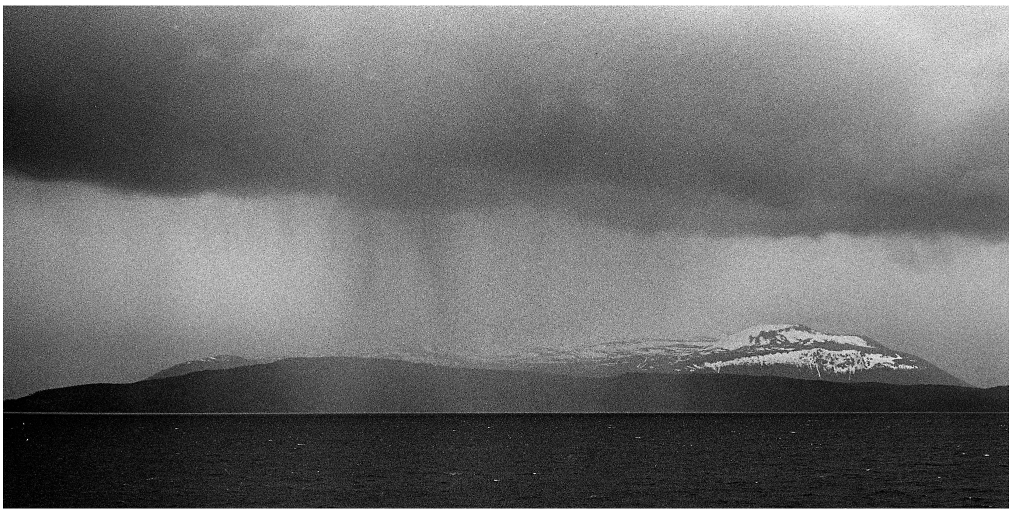
Det er ikke innlysende at det går bra å bytte om på integrasjon og uendelig sum, og derfor vil utledningen av fourierkoeffisientene fra økt 17 heller ikke klassifisere som et ordentlig bevis.

$\boxed{2}$ La $f_n(t) = nt\left(1 - t^2\right)^n$. Finn

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

for $0 \leq t \leq 1$, og regn ut både

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt \qquad \text{og} \qquad \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(t)\, dt$$



[1] Sophus Lie leverte seriøse bidrag til forståelsen av differensiallikninger, men det er kompliserte greier. Jeg skjønner ingenting av det.