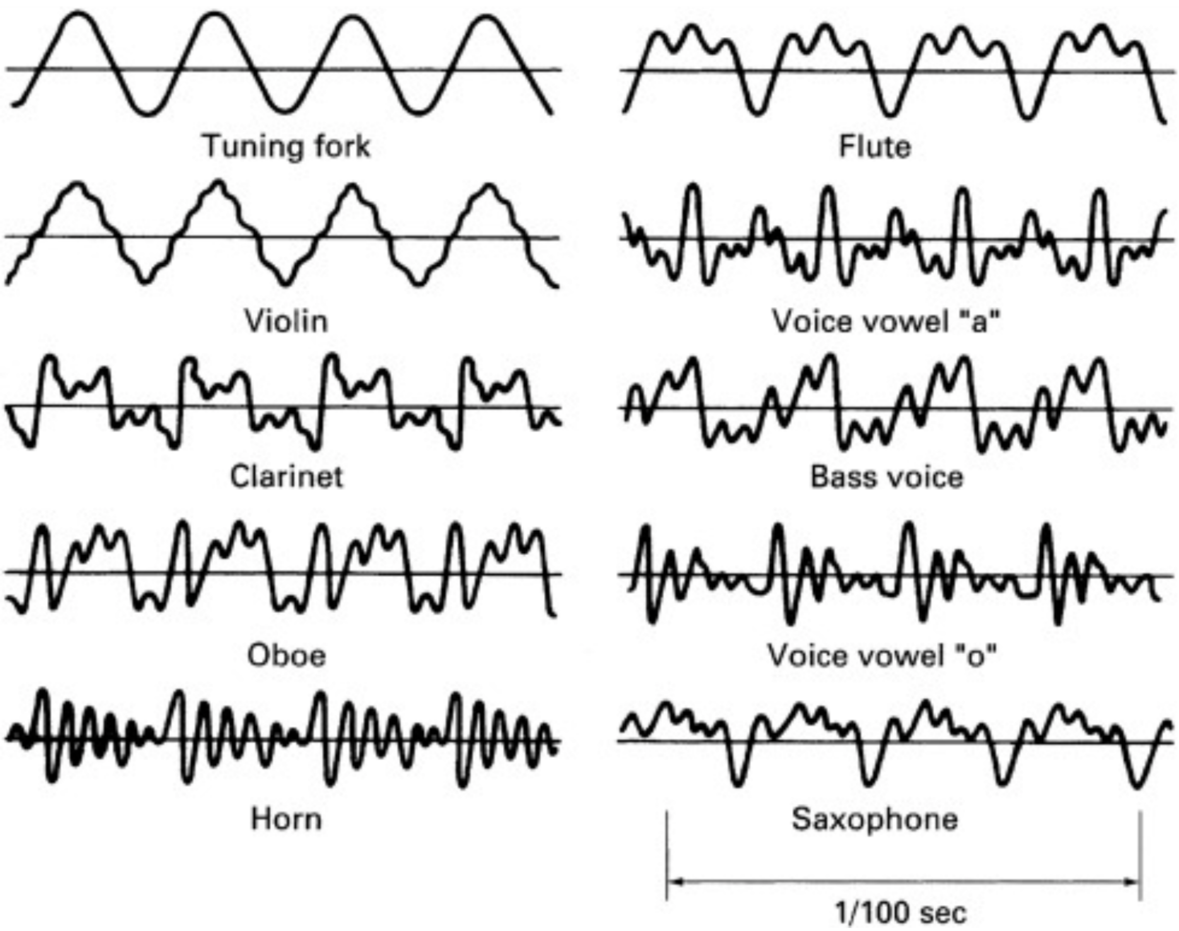
18 - FOURIEROMVENDING

Så har du dratt kontrabassen din gjennom byen og inn i Olavshallen eller Grieghallen eller Oslo Konserthus og så hater du livet ditt og så slår klokken 1000 og så gir en forfyllet oboist stemmetonen på 442 Hz. Dette betyr at molekylene i området rundt obomunningen begynner å dytte på hverandre og en trykkbølge sprer seg i rommet, og når frekvensen er 442 Hz betyr det i grove trekk at trykkbølgens bølgetopper treffer trommehinnen din 442 ganger i sekundet.

Eller vel, det er vel strengt tatt en forenkling, for nøyaktig hva som er bølgetoppen, er ikke nødvendigvis enkelt å peke på om du tar en titt på et plot av en faktisk tone. Molekylene kan dirre frem og tilbake på forskjellige måter, og ingen praktiske musikkinstrumenter lager en ren sinustone. Følgende figur illustrerer det vi i musikken kaller klangfarge. Hvor er for eksempel oboens bølgetopp?



https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/middle-c

Men det som er lett å se på bølgeformene over, er at de alle har noe vi kan kalle en grunnfrekvens, eller en grunnperiode. En vanlig definisjon er at et signal x er periodisk med periode T dersom

$$x(t+T) = x(t)$$

for alle t. Men dersom T er en periode er også $2T$ og $3T$ og $4T$ perioder, og så videre, så et periodisk signal har alltid mange perioder. Den minste av dem kalles kalles **fundamentalperioden** til x.

$\boxed{1}$ Marker fundamentalperiodene i alle bølgeformene i figuren over.

Forholdet mellom fundamentalperioden T og **vinkelfrekvensen** ω er

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

siden radianer er vårt foretrukne vinkelmål. Enheten for vinkelfrekvens er radianer per sekund.

$\boxed{2}$ Signalene i figuren er plottet slik at alle har omtrent samme vinkelfrekvens. Finn denne.

I forrige uke lærte vi at 2π-periodiske signaler stort sett alltid kan dekomponeres i overtoner

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \text{med} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}\,dt,$$

og vi beregnet fourierkoeffisientene c_n for noen teoretiske signaler. Et T-periodisk signal kan også dekomponeres i overtoner, men formlene er litt mer grisete: [1]

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T} \qquad \text{der} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2\pi int/T}\,dt$$

$\boxed{3}$ La $m, n \in \mathbb{N}$ og sjekk at de komplekse eksponensialfunksjonene over er ortogonale på $[-T/2, T/2]$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi imt/T}e^{-2\pi int/T}\,dt = \begin{cases} T & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

slik du gjorde med sinusfunksjonene i forrige uke, og utled heuristisk uttrykket

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2\pi int/T}\,dt,$$

for koeffisientene på samme måte.
(Begynn med spesialtilfellet $T = 2\pi$ først om det er stress med alt griseriet.)

[1] Huskeregelen er "two pints per period" for $2\pi int/T$.

For en ingeniør er det for alle praktiske formål stort sett greit å skrive

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

men dette ikke alltid er helt sant, og derfor skriver vi heller

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

for å være på den sikre siden. Mer om dette neste uke. Siden all relevant informasjon om periodiske funksjoner finnes på intervallet $[-T/2, T/2]$, er det egentlig irrelevant om vi tenker at vi skal finne fourierrekken til det periodiske signalet x eller funksjonen $x : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$. Fourierekken vil ha grunnperiode T og repetere seg selv utenfor intervallet $[-T/2, T/2]$ uansett.

Den T-periodiske utvidelsen av enhetsprangfunksjonen $u : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ gitt ved

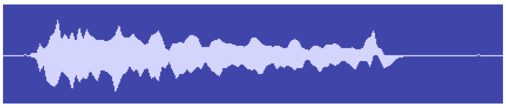
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

kalles en firkantbølge med periode T, og tilsvarende gjøres for sagtann- og trekantbølgen.
Finn fourierrekkene til

$\boxed{4}$ firkantbølgen. $\boxed{5}$ sagtannbølgen. $\boxed{6}$ trekantbølgen.

og plott bølgeformene og noen av fourierrekkenes partialsummer.

Men det er nå en liten catch. Et periodisk signal finnes ikke i virkeligheten; alle signaler dør ut på et eller annet tidpsunkt. Her er for eksempel bølgeformen til en enkelt G13-akkord på min gibson es-175 som jeg kjøpte når jeg var stipendiat. Dette lydsignalet er nok "omtrent" periodisk om du virkelig zoomer inn og ser på tre-fire perioder etter hverandre, men det bør være klart at et periodisk signal kun er en abstraksjon. La oss nå se litt på hvordan vi finner "fourierrekken" til et ikke-periodisk signal. Først en oppvarmingsoppgave.



$\boxed{7}$ Finn fourierrekken til $y : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

for alle $T > 2$, og plot av y og noen partialsummer på $[-T, T]$ for noen verdier av T.

Men eksemplet illustrerer også en annen ting. La oss si at du ønsker å finne fourierrekken til $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

Er dette i det hele tatt mulig? Kanskje det går an å finne fourierrekken til y i oppgaven over, og så la $T \to \infty$? Hvordan ville det sett ut? Vi vet at

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

der

$$c_n\,(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-2\pi int/T} dt$$

La oss sette denne inn i fourierrekken:

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-2\pi ins/T} ds\; e^{2\pi int/T}$$

og gange og dele med 2π:

$$y(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-2\pi ins/T} ds\; e^{2\pi int/T} \frac{2\pi}{T}$$

Det er sikkert ikke så lett å se, men den ytterste summen kan nå tolkes som en riemannsum der gitteravstanden er $\frac{2\pi}{T}$, og gitterpunktene er $\frac{2n\pi}{T}$. Når $T \to \infty$ går gitteravstanden mot null, og dersom det er rettferdighet i verden, går $y \to x$ og summen mot et integral fra uendelig til uendelig:

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} ds\; e^{i\omega t} d\omega$$

Her ble "variabelen" $\frac{2n\pi}{T}$ om til variabelen ω. Det innerste integralet kalles **fourieromvendingen** til x, og skrives

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Dette kan du tenke på som fourierkoeffisientene til signalet x, men siden signalet ikke er periodisk, trenger du mange flere frekvenser, og derfor blir

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

et integral istedet for en uendelig sum, slik vi er vant til fra fourierrekker. Det siste integralet kalles **inversomvendingen** eller **rekonstruksjonen**.

$\boxed{8}$ Denne kommer dessverre på eksamen.

Vi skriver også

$$\widehat{x}(\omega) = \mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

for å understreke at fourieromvendingen er en operator som tar inn et signal og gir ut et annet. Det går an å føre et stringent bevis for at dersom x er et tilstrekkelig pent signal, er

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

men det er litt for hardt for oss. [2] Fourieromvending er ganske vanskelig å skjønne noe av i begynnelsen, men dersom du er komfortabel med fourierrekker og lineære systemer, er du nok godt rustet. Fourieromvending er helt ekstremt viktig i både matematikk og i et spektakulært utvalg forskjellige anvendelser:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform`
La oss nå regne ut et par omvendinger. Finn fourieromvendingen til

$\boxed{9}$ $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

(Sammenlikne med oppgave 7.)

$\boxed{10}$ $f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$
Hva skjer når $a \to \infty$?

$\boxed{11}$ $x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$
(Hint: lettest om du skriver $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.)

$\boxed{12}$ $\delta(t)$

$\boxed{13}$ $f(t) = e^{-a|t|}$

$\boxed{14}$ $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$

$\boxed{15}$ $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

Notasjonen $X(\omega)$ istedet for $\widehat{x}(\omega)$ er innarbeidet i noen miljøer, men er riktigere å skrive $X(i\omega)$.

$\boxed{16}$ Hvorfor det?
(Hint: Gå to uker tilbake i pensum.)

[2] Les Elias Stein og Rami Shakarchis klassiker "Fourier Analysis" om du lurer på dette. Den finnes på nett.

Stemmer, fourieromvending er bare laplaceomvending

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

evaluert i $s = i\omega$. Av den grunn er det vanlig å skrive

$$s = \sigma + i\omega$$

i laplaceomvending, og jeg kommer derfor av prinsipp til å skrive $\hat{x}(\omega)$ eller $X(i\omega)$ og ikke $X(\omega)$. Den store forskjellen på fourier- og laplacomvending er hva du putter inn og hva det brukes til. Vi laplaceomvender stort sett bare signaler på formen

$$x(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

og derfor skrives laplaceomvending som regel

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt.$$

siden dette er underforstått. Vi fourieromvender derimot signaler som kan være forskjellig fra 0 overalt, men du kan ikke putte inn hva som helst. Et signal fra den virkelige verden må både starte og stoppe, og derfor er det naturlig å kreve at

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$

for alle signaler du kommer til fourieromvende. Dersom vi skal være helt trygge på at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

bør x være glatt og

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^k \left|\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right| < \infty$$

for alle k og n. Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et uendeligdimensjonalt vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på en mer komplisert integrasjonsteori oppfunnet av Henri Lebesgue tidlig i det tyvende århundre. Vi har allerede fourieromvendt funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet, så vi får bare lukke øynene og håpe at det går bra.

Siden fourier er spesialtilfelle av laplace, er regnereglene like, men noen av dem blir litt annerledes siden vi putter inn signaler som går mot null når $t \to \pm\infty$ istedet for signaler som er null for $t < 0$. Prøv å utlede at

$\boxed{17}$ $\hat{\dot{x}} = iw\hat{x}$ $\boxed{18}$ $\widehat{x(t-\theta)} = e^{-i\omega\theta}\hat{x}$ $\boxed{19}$ $\widehat{e^{i\theta t}x(t)} = \hat{x}\left(\omega - \theta\right)$ $\boxed{20}$ $\widehat{x(at)} = \frac{1}{|a|}\hat{x}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

I sannsynlighetsregningen kalles laplaceomvending for **momentgenererende funksjon**, mens invers fourieromvending kalles **karakteristisk funksjon**.

$\boxed{21}$ Finn fourieromvending og karakteristisk funksjon til normalfordelingen. (Hint: Begynn med standardnormalfordelingen. Du må nesten vite at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1.$$

Dette skal vi regne ut i neste semester.)

Nå skal vi ta et gjensyn med Balchens foldingstriks

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}\,ds$$

som løser initialverdiproblemet $\dot{x} + ax = f$, $x(0) = x_0$. Integralet på høyresiden dukker til stadighet opp i studiet av LTI-systemer og det kalles **folding** eller **konvolusjon**. Det er et slags produkt mellom funksjoner, og den generelle definisjonen er

$$x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)\,ds.$$

For signaler som er 0 når $t < 0$ reduserer konvolusjonen til

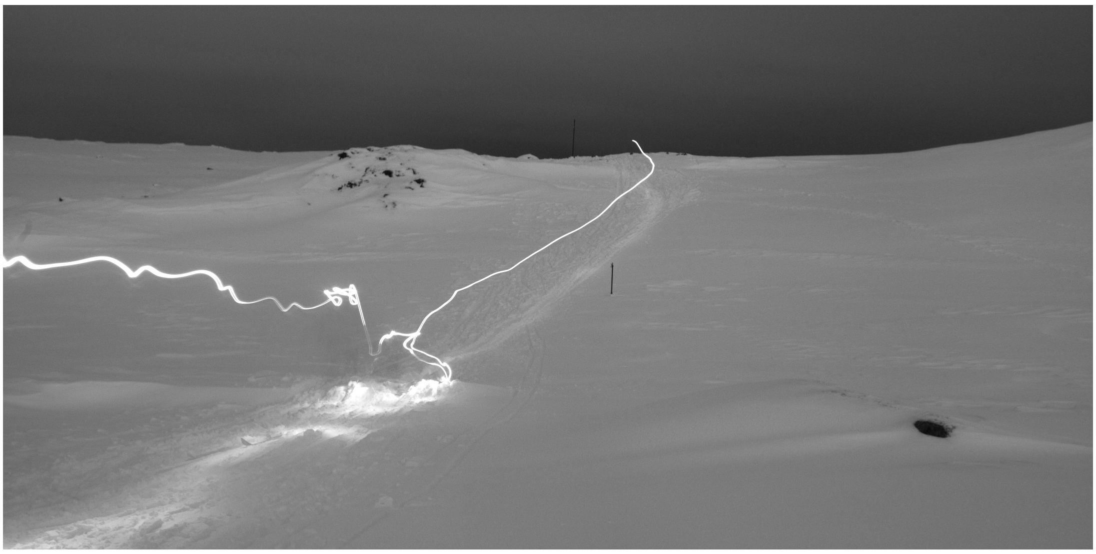
$$x * y = \int_0^t x(s)y(t-s)\,ds$$

og derfor vil konvolusjon ofte være definert slik i et typisk kapittel om laplaceomvending i en typisk lærebok i ingeniørmatematikk. For å få en følelse av hva konvolusjon er, er det faktisk lurt å begynne med litt sannsynlighetsregning. La oss kaste to terninger.

$\boxed{22}$ Finn sannsynlighetsfordelingen til $Z = \{\text{summen av antall øyne på to terninger}\}$.

Inspirert av dette kan vi gå litt videre. Anta at du har to uavhengige stokastiske variable X og Y med sannsynlighetstettheter $f(x)$ og $g(y)$.

$\boxed{23}$ Hva er sannsynlighetstettheten til $Z = X + Y$?



OBS: HERFRA OG UT KOMMER IKKE PÅ EKSAMEN

Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z - v$, tar $X + Y$ verdien z. Med andre ord kan $X + Y$ ta verdien z på mange forskjellige måter, og for å finne sannsynlighetstettheten til $X + Y$ må vi derfor summere opp bidraget fra alle alle måtene dette kan skje på, altså alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z - v)$. Men dette er jo innmaten i konvolusjonsoperatoren! Sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X + Y$ blir derfor

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z - v)\, dv.$$

Det som gjør konvolusjon så praktisk i forhold til lineær systemteori, kalles konvolusjonsteoremet. Vi bruker varablelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned}
\widehat{x * y} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v)\; dv\; e^{-i\omega t}\; dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v)\; e^{-i\omega t}\; dv\; dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u)\; e^{-i\omega(u+v)}\; dv\; du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)\; e^{-i\omega v}\; dv\; y(u)e^{-i\omega u}\; du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\; e^{-i\omega v}\; dv \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u}\; du = \hat{x}\hat{y}
\end{aligned}$$

Konvolusjonsteoremet gjelder for laplaceomvending og, men utledningen er bittelitt annerledes siden signalene er 0 for $t < 0$. La oss nå si at vi har løst systemet

$$Lx = f \qquad x(0) = 0$$

med laplaceomvending og fått

$$X(s) = H(s)F(s).$$

Konvolusjonsteoremet gir nå at

$$x = h * f$$

så hvis vi kunne finne ut hvilket signal som har laplaceomvending H, så er det bare å skrive opp løsningen x. Men dersom vi løser

$$Lx = \delta$$

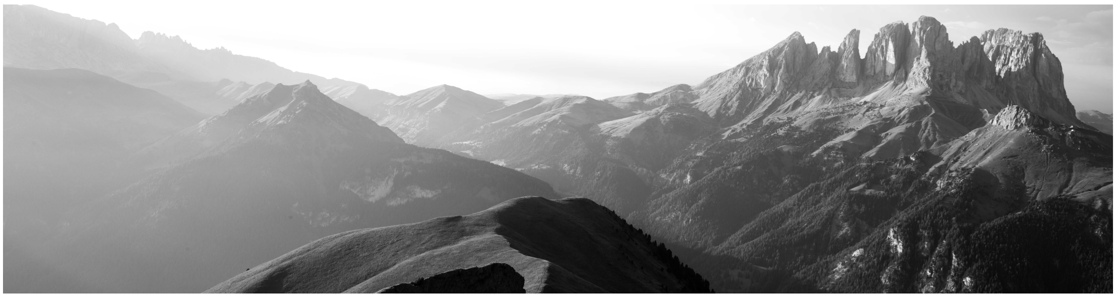
med omvending får vi

$$X = H(s)L(\delta) = H(s)$$

så impulsresponsen er visst det ukjente signalet vårt. Her har vi forklaringen på at impulsresponsen har fått bokstaven h; det er det signalet som har laplaceomvending H.

Diracpulsen er et viktig verktøy i signalbehandling, for den er et signal som inneholder like mye av alle frekvenskomponenter. Det sies at Asbjørn Krogstad (legendarisk professor i akustikk på NTH) tok med seg startpistol og fyrte av et skudd inne i Nidarosdomen i forbindelse med et oppdrag der han skulle analysere akustikken i rommet. På folkemunne sier man gjerne at fourieromvendingen til impulsresponsen det samme som frekvensresponsen til systemet.

$\boxed{24}$ Kommer på eksamen det her.



UKENS KVANTEFYSIKK

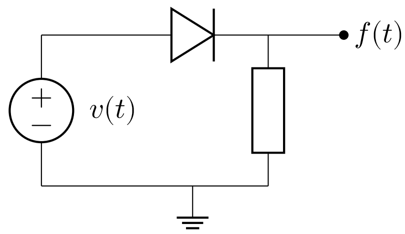
Man kan aldri si med full sikkerhet hvor en bitteliten partikkel befinner seg, men man kan regne på sannsynligheten for at den befinner seg her eller der. En partikkel representeres i moderne fysikk ved en kompleks **partikkelbølgefunksjon** Ψ. Denne har ingen fysisk tolkning, men $|\Psi|^2 = \overline{\Psi}\Psi$ tolkes som sannsynlighetstettheten for partikkelens posisjon.

Det samme gjelder for partikkelens moment; man kan aldri vite helt sikkert hva slags moment en partikkel har, men man kan si noe om sannsynligheten for at en partikkel har så og så mye moment. Moment p og bølgelengde λ er to sider av samme sak ifølge de Broglies partikkelbølgerelasjon:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Her er $h = 6.626 \cdots \cdot 10^{-34}$ er Plancks konstant. Siden bølgelengde og frekvens er inverse størrelser, er det derfor kanskje ikke så overraskende at fourieromvendingen til Ψ gir oss sannsynlighetstettheten $\overline{\hat{\Psi}}\hat{\Psi}$ til partikkelens moment. Mer om dette i uke 10.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Momentum_operator`

UKENS ELEKTROTEKNIKK



Følgende krets kalles en halvbølgelikeretter. Denne er essensiell når noe som trenger likespenning skal forsynes med strøm fra stikkontakten i veggen, som leverer vekselspenning.

Dersom du mater inn et periodisk signal gitt ved

$$v(t) = \sin 100\pi t,$$

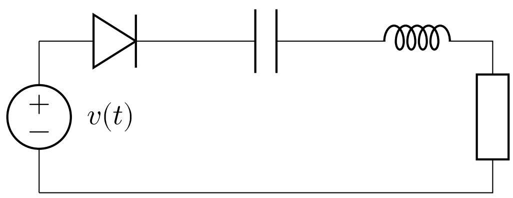
(strømmen i veggen har grunnfrekvens 50 Hz) blir utsignalet den $\frac{1}{100\pi}$-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{100} \le t \le 0 \\ \sin 100\pi t & 0 < t < \frac{1}{100} \end{cases}$$

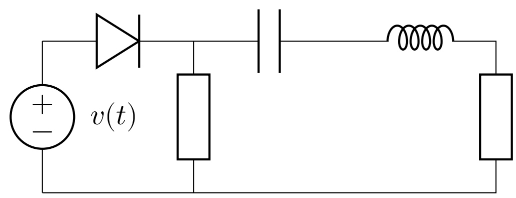
$\boxed{1}$ Finn fourierrekken til x.

$\boxed{2}$ Sett opp en likning for kretsen.

Du kan jo nå ta en ny titt på frekvensfordoblerkretsene



og



om du vil.

$\boxed{3}$ Sett opp differensiallikninger for kretsene. (Den siste er ganske hårete.)

4 Lodd opp kretsene eller kjør numerisk differensiallikningsløser i python, send inn noen frekvenser og se hva som skjer.

UKENS STATISTIKK

En amerikaner står og koser seg med å perforere en uendelig lang låvevegg med maskingeværet sitt. Han er ganske full og har det kjempekt, og løpet peker i tilfeldige og uniformt fordelte vinkler mellom $\theta = -\pi/2$ og $\theta = \pi/2$. (Når $\theta = 0$ er løpet ortogonalt på veggen).

1 Finn sannsynlighetstettheten og den tilhørende karakteristiske funksjonen til treffpunktet x på veggen. Du finner LF på side 154 i Hardle og Simar:
`https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-26006-4`