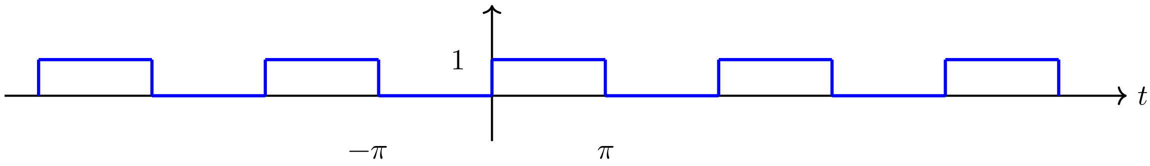
TMA4101/4106/4111/4121

17 - FOURIERREKKER

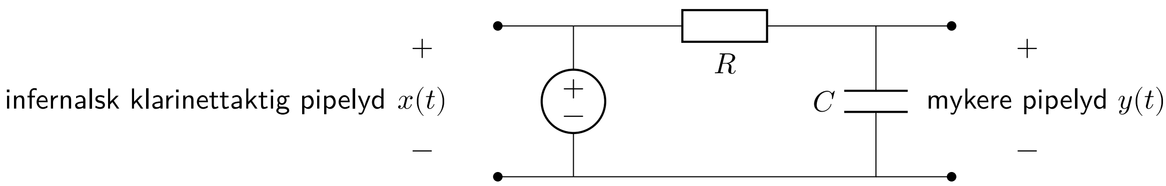
Professor Laurentius Lie har kjøpt en ny timer til å henge på kjøleskapsdøren sin. Men han plages, for timeren signaliserer at tiden er omme med en infernalsk stygg pipelyd. Pipelyden er stygg fordi den er en firkantbølge: [1]



Forskjellige bølgeformer låter forskjellig, og firkantbølgelyd låter omtrent som en klarinett. Du kan lese om forskjellige bølgeformer og høre på dem her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Waveform`

$\boxed{1}$ Finn et passelig funksjonsuttrykk til firkantbølgen. Det finnes haugevis.

Professor Lie trenger funksjonsuttrykket fordi han er født i 1959 og derfor alltid regner litt med penn og papir før han lodder sammen kretser. Han ønsker nemlig å installere et analogt lavpassfilter på timeren for å få myket opp den forferdelige klarinettlyden. Dette betyr i hovedsak at han ønsker å sende musikksignalet gjennom følgende krets:

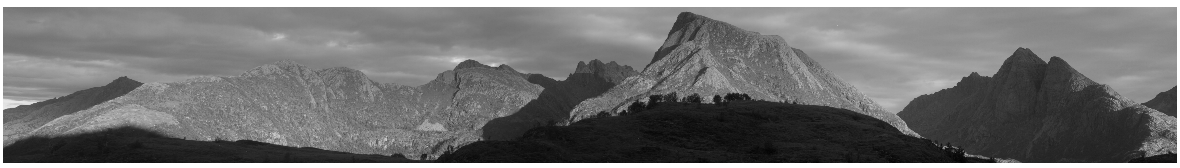


Et lydsignal representeres ved en spenning så lenge det befinner seg inne i stereoanlegget og ikke har kommet ut gjennom høyttaleren ennå. Dere som går MTKJ kan ta det helt rolig; kretsen kommer ikke på eksamen. Men differensiallikningen som modellerer den er perfekt for TMA4106:

$$\dot{y} + \frac{1}{RC}y = x$$

Hvis du går MTKJ og ikke liker kretser og ikke tror meg når jeg sier at dere får kretsteori i TMT4252 kan du selvfølgelig tenke på noe helt annet, et prosessanlegg eller noe. Det spiller ingen rolle, så lenge differensiallikningen er den samme.

$\boxed{2}$ Du har i bunn og grunn verktøy nok til å løse likningen, men det er hårete.



[1] Desom t måles i sekunder kommer ikke denne pipelyden til å være hørbar som en tone, så tenk at t måles i for eksempel millisekund eller noe slikt.

Noen av dere var kanskje pragmatiske og så at firkantbølgen er en **periodisk utvidelse** av enhetssprangfunksjonen på $[-\pi, \pi)$:

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd } x(t) = \begin{cases} \vdots \\ 1 & \text{for } -3\pi \leq t < -\pi \\ 0 & \text{for } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{for } \pi \leq t < 3\pi \\ \vdots \end{cases}$$

og prøvde så kanskje å sette opp en uendelig følge av sprangresponser, omtrent slik vi gjorde i første undervisningsuke. Noen andre gikk kanskje på wikipedia og oppdaget at denne firkantbølgen kan skrives

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t - n\pi)$$

der u er enhetssprangfunksjonen og alt før $t = 0$ er satt til 0, og så er det bare å laplaceomvende differensiallikningen

$$\dot{y} + \frac{1}{RC} y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t - n\pi)$$

og regne i vei.

De verktøyene dere har fått så langt er slett ikke dårlige, men for akkurat dette problemet finnes det et som er enda bedre. Nå skal vi se på det. For å få analysert filteret og gjort noe med den infernalske og klarinettaktige pipelyden trenger Professor Lie en bestemt type funksjonsuttrykk.

$\boxed{3}$ Skriv et pythonscript som plotter funksjoner av typen

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \sin\left((2n-1)t\right)$$

for forskjellige verdier av N. Hva skjer når $N \to \infty$?

Min påstand er nå at

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd } x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

Hvis dette er sant har Professor Lie en tredje måte å løse differensiallikningen på, nemlig å laplace-omvende

$$\dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

og regne i vei og finne y. Vi skal spinne videre på dette, men først skal vi gjøre et lite stykke heuristisk tenkning som er obligatorisk for alle som skal lære seg **fourieranalyse**, altså kunsten å skrive noe som en uendelig sum av sinusoidale funksjoner. Grunnen til at jeg valgte akkurat π og 1 er fordi formlene nå kommer til å bli så enkle som mulig, og det er fornuftig i begynnelsen.

Det bør kanskje ikke komme som noen sjokk at en at en funksjon kan skrives som en uendelig sum av andre funksjoner. Du har jo allerede på gymnaset lært at

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

så lenge $|z| < 1$, og i høst har vi lært at

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad \text{og} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{og} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

uansett hva z er. [2] Så la oss inntil videre anta at et signal x kan skrives som en uendelig sum av sinusfunksjoner:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

og se om vi klarer å hoste opp en formel for koeffisientene b_n. Dette er ikke så vanskelig hvis man vet hvordan det gjøres, og vi skal gjøre essensielt det samme resonnementet mange ganger dette semesteret, så du kommer nok til å forstå det. Det første vi må vite er at sinusfunkjonene er **ortogonale** på intervallet $[-\pi, \pi]$:

$\boxed{4}$ Vis at

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)\,dt = \begin{cases}\pi & \text{for } n = m\\ 0 & \text{for } n \neq m\end{cases}$$

for alle $n, m \in \mathbb{N}$.

[2] z kan være til og med være kompleks, det går helt fint.

Du synes sikkert nå det var rart å si at sinusfunksjonene var ortogonale, men husk fra forrige semester at vektorer kan være så mangt. Skalarproduktet du lærte om på gymnaset kan generaliseres, og det skal vi gjøre dette semesteret.

$\boxed{5}$ Neste post på programmet er å gange likningen

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

med $\sin mt$ og integrere fra $-\pi$ til π. Hvis du gjør dette riktig, skal du ende opp med

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt$$

$\boxed{6}$ Posten etter er selvfølgelig å bruke denne formelen til å regne ut at

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd } x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

(Konstantleddet $\frac{1}{2}$ har jeg ikke forklart hvordan du regner ut ennå, men prøv å plotte partialsummene fra oppgave 2 uten denne, så skjønner du nok omtrent hva det går i.)

Du kan for øvrig lese om firkantbølgen her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave`
Merk spesielt det lydsporet som legger på nye overtoner hvert sekund:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave#Characteristics_of_imperfect_square_waves`
Det begynner med en behagelig sinustone, og så blir det mer og mer infernalsk og klarinettaktig etterhvert som overtonene slenges på.

Så nå er det din jobb å venne deg til at den infernalske og klarinettaktige pipelyden kan skrives

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t.$$

Dette kalles en **fourierrekke** og leddene

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

kalles **overtoner**, for det er faktisk det det er. Alle som har spilt et blåseinstrument vet at dersom man trykker inn noen klaffer eller ventiler og bare regulerer tonehøydene med leppetrykket, får man ut et bestemt sett med frekvenser som kalles naturtonerekken. [3] Dette kalles å “spille på overtoner”.

$\boxed{7}$ Professor Lie er ennå ikke helt fornøyd, for det finnes en enda bedre måte å skrive ned firkantbølgen på, nemlig ved komplekse eksponensialfunksjoner. Prøv.

[3] Å spille på naturtonerekken er av en eller annen grunn legitimt på messinginstrumenter, men ikke på treblåsinstrumenter. Jeg har prøvd å spille fagott en gang og det var grusomt, for man måtte slå opp i en svær tabell hver gang man skulle lære en ny tone.

Alt dette er forresten oppkalt etter Joseph Fourier:
https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier
Han satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. Han oppfant også det vi nå kaller fourierrekker. De satte opp en statue av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst rekvirert av staten og smeltet om til ammunisjon under andre verdenskrig.

Trikset i oppgaven over er enkelt, det er bare å huske at

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

og sette inn i uttrykket og få

$$\text{infernalsk klarinettaktig pipelyd } x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{(2n-1)it}.$$

og nå er vi endelig fremme ved punktet der Professor Lie kan ta frem penn og papir og begynne å regne, for nå kan vi med letthet finne et lukket uttrykk for y.

$\boxed{8}$ Løs differensiallikningen.
(Hint: Frekvensresponsen kommer nå til sin rett.)

Det enkleste er vel å laplaceomvende likningen, og få

$$sY + \frac{1}{RC}Y = X$$

og observere at transferfunksjonen eller systemfunksjonen er

$$H(s) = \frac{RC}{RCs + 1}$$

slik at frekvensresponsen blir

$$H(i\omega) = \frac{RC}{RCi\omega + 1}.$$

Denne kan du selvfølgelig også hoste opp ved å finne den inhomogene løsningen til

$$\dot{y} + \frac{1}{RC}y = e^{i\omega t}$$

hvis du liker det bedre. Uansett, konklusjonen er at

$$\begin{aligned}\text{mykere pipelyd } y(t) =& \frac{RC}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H\left(i(2n-1)\right)}{2n-1}e^{(2n-1)it} \\ =& \frac{RC}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{RC}{(2n-1)\left(RCi(2n-1)+1\right)}e^{(2n-1)it}.\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Plott x og y i samme plot i python.
(MTELSYS: Finn en motstand og en kondensator og koble opp kretsen og kjør lydsignalet gjennom. Digilenten din har visst en funksjon for å lytte til resultatet.)

Nå ser vi for øvrig hvorfor kretsen kalles et lavpassfilter. Et raskt blikk på transferfunksjonen viser at den helt klart demper høye frekvenser mer enn lave.

$\boxed{10}$ Plott amplituden til overtonene til x og y, altså absoluttverdiene av koeffisientene mot $\mathbb{Z}$.

Vi skriver

$$b_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1} \qquad \text{og} \qquad c_n = \frac{1}{\pi i}\frac{1}{2n-1}$$

og dette kalles **fourierkoeffisientene** til signalet x. Professor Lie har en ekslusiv smak; han hater både sinusfunksjonen og all musikk innspilt etter 1965, og derfor liker han c_n mye bedre enn b_n. Grunnen til at han hater sinusfunksjonen er velfundert, den er som vi vet ikke en egenvektor til differensial-operatoren, og derfor er den håpløst klønete å regne på i noen situasjoner. [4] Dessuten inneholder c_n mer informasjon enn b_n. Vi kaller $|c_n|$ **amplituden** til overtone nummer n, og $\arg c_n$ for **fasen**. Likeledes kaller vi $|H|$ for **amplituderesponsen** og $\arg H$ for **faseresponsen**. I elektroteknikk er de mest opptatt av amplituderesponsen, mens i materialteknikk er det faseresponsen som gjelder.

$\boxed{11}$ Regn ut amplitude- og faserespons til Professor Lies lavpassfilter.

Jeg har som sagt lagt den infernalske klarinettaktige pipelyden inntil videre ha periode 2π for å være grei. Formlene blir penest da. La oss fortsette litt med det. Det sentrale poenget i denne økten er at 2π-periodiske funksjoner stort sett kan skrives

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

der

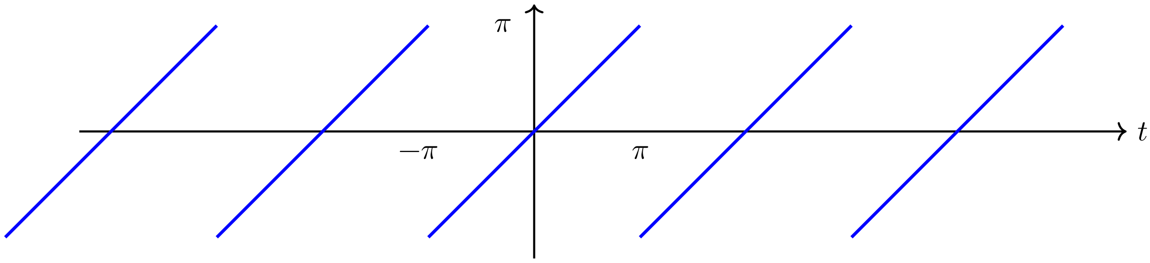
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}\,dt$$

og at dette er nyttig i mange anvendelser:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series`
Diskomusikk, spektroskopi og strømprisprediksjon hadde vært utenkelig uten fourieranalyse. På et eller annet tidspunkt må vi begynne å forholde oss til andre perioder enn 2π, men det får bi litt.

$\boxed{12}$ Utled uttrykket for c_n ved å kopiere resonnementet i oppgave 4 og 5 over.

[4] I andre situasjoner er sinusfunksjon nyttig, men Professor Lie liker å overlate disse til studassene.

La oss regne ut noen andre fourierrekker. En sagtannbølge er den 2π-periodiske utvidelsen av $f(t) = t$. Den ser sånn ut:



og dukker opp i naturen gjennom en såkalt stick-slip-bevegelse:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Stick-slip_phenomenon`
Et klassisk eksempel er strykeinstrument (følg med på den tjukkeste strengen):
`https://tv.nrk.no/serie/oeyeblikket/sesong/1/episode/8/avspiller`

$\boxed{13}$ Finn fourierrekken til sagtannbølgen.
(Tips: Her kan det være lurt å splitte integralet

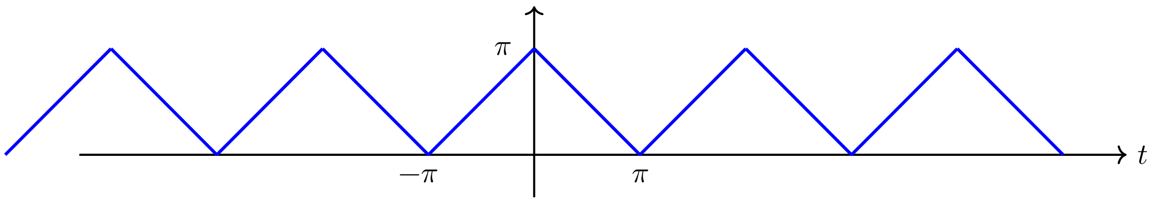
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt - i\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)$$

og utnytte at $f(t) = t$ er en odde funksjon. Da blir regningen litt enklere.)

En tredje interessant bølge er trekantbølgen, som er den periodiske utvidelsen av

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & t < 0 \\ \pi - t & t \geq 0 \end{cases}$$

og ser slik ut:



Mange ingeniører vil uten å kjenne noen smerte påstå at firkantbølgen er den deriverte til trekantbølgen, og matematikere river seg i håret av slikt. Men det går bra, du kan tenke slik om du vil.

$\boxed{14}$ Finn fourierrekken til trekantbølgen og plott på intervallet $[-5\pi, 5\pi]$.
(Tips: Her kan det likeledes være lurt å utnytte at f er en jevn funksjon.)

UKENS KJEMI

Fourierrekker er den matematiske beskrivelsen av funksjonene til det vi på folkemunne bare kaller "frekvenser". Dette er så fundamentalt for fysikk- og kjemiforståelse at det ikke er så godt å vite hvor man skal begynne om man skal fortelle om det:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Spectroscopy`
Atomer og molekyler oppfører seg i bunn og grunn ikke ulikt Professor Lies filter:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_line`
og absorpsjonsspekteret til hydrogenatomet var en av de observerte fenomenene som ledet til kvantemekanikkrevolusjonen på 1920-tallet. Dette tar en stund å bli vant til, men Feynman forklarer det ganske folkelig:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_toc.html`
og fouireranalyse er et viktig inngangssteg dersom man ønsker å få en illusjon av forståelse for kvantemekanikkformalismen. Vi skal studere Schrödingers berømte likning om noen uker.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Du kan også skrive firkantbølgen som en uendelig sum av enhetsprangfunksjoner uten å sette signalet til null for $t < 0$, men det blir litt mer hårete.

Det finnes for øvrig tre forskjellige måter å skrive fourierrekken på. Noen liker den ene måten, andre hater den andre. Følgende oppgave illustrerer forholdet mellom dem.

$\boxed{2}$ Anta du har en funksjon $x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Vis at dersom

$$f(t) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{int}$$

kan x også skrives

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt$$

og

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{N} d_n \cos(nt + \phi_n).$$

$\boxed{3}$ Du deriverer en pipetone. Hva skjer med klangen?
(Hint: Deriver fourierrekken til signalet.)