16 - LAPLACEOMVENDING

Hvis du skal lage en presis kalender som spår planetenes posisjon frem i tid er du pent nødt til å anta at planetene går i bane rundt solen og ikke omvendt. Den første som foreslo denne sprø ideen var Aristarkhos av Samos:
https://en.wikipedia.org/wiki/Aristarchus_of_Samos
Han ble selvfølgelig ikke tatt særlig seriøst, og ideen lå død frem til Kopernikus:
https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus
Av en annen merkelig grunn la ikke den katolske kirke merke til dette forferdelige blasfemiet før Galileo Galilei bygget det første refraksjonsteleskopet og observerte at Jupiter hadde måner:
https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

Imens satt Tycho Brahe på en øy og festet og drakk og bygget presise måleinstrumenter og tabulerte planetenes gang nøye nok til at Johannes Kepler kunne formulere planetloveene:
https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
Kepler trodde naturligvis også at planetene gikk rundt solen, men gudfryktig som han var slapp han (i likhet med Kopernikus) unna med det. Keplers planetlover følger av Newtons gravitasjonslov:
https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
og vips så kjente menneskeheten til en kvantitativ mekanisme for store legemers bevegelse i verdensrommet, ihvertfall i god avstand fra ting som er tunge nok til å merkbart bøye av lyset.

Den neste som gjorde noen fremskritt her het Pierre-Simon Laplace:
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
Han gikk noen knepp videre og fant ut av slike ting som hvorfor tidevannsbølgen på jordoverflaten har to bølgetopper og ikke bare én, og hvorfor Jupiters bane så ut til å skrumpe mens Saturns så ut til å vokse, [1] et problem selv Euler ikke greide å finne ut av. Laplace regnes som en av de største vitenskapsmenn som har levd, og vi kan takke ham for så mange ting at de knapt er vits i å liste opp. For dere unge lovende sivingstudenter er det kanskje tre ting som er verdt å nevne:

- sannsynlighetsregning og statistikk
- partielle differensiallikninger
- uttrykket "vi ser lett at..." som man bruker når man ikke husker et resonnement

[1] Dette skyldes resonans; Jupiter går fem ganger rundt solen omtrent like fort som Saturn går to, og dette fører til at banene skrumper og vokser med en periode på 929 år. Samme resonans forekommer andre steder i solsystemet, for eksempel blant Jupiters galileiske måner; Ganymedes går rundt en gang i uken, Europa dobbelt så fort, og Io fire ganger så fort. Om noen milliarder år kommer Callisto antagelig til å bruke to uker rundt.
https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_resonance

Jo, forresten, en fjerde ting, nemlig laplaceomvending:

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Dette er et merkverdig men nyttig redskap. Vi bruker det til å løse initialverdiproblemer, og derfor er funksjonen x alltid definert til å være null for $t < 0$, slik at laplaceomvendingen like gjerne kan skrives

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

kalt **ensidig laplaceomvending**. Parameteren s er et komplekst tall, og laplaceomvending er helt klart en lineæroperator. Man tenker på laplaceomvending som noe som tar inn en funksjon av t og gir ut en korresponderende funksjon av s, og vi skriver $\mathcal{L}(x) = X(s)$ for å signalisere dette. [2] La oss begynne med et eksempel.

$\boxed{1}$ Finn laplaceomvendingen til $x(t) = e^{at}$, der a er en konstant.
(Hint: Du må nesten anta at realdelen til s er større enn a, slik at integralet konvergerer.)

For at vi raskt skal skjønne hvordan laplaceomvending kan brukes til å løse differensiallikninger, skal vi umiddelbart utlede en viktig regneregel.

$\boxed{2}$ Vis at

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$$

(Hint: Anta at realdelen til s er større enn null og ta en delvis integrasjon.)

Siden det er laplaceomvending er en lineæroperator, kommer det kanskje ikke som et sjokk at den kan brukes på lineære differensiallikninger. La oss begynne med initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = 1$$

$\boxed{3}$ Laplaceomvend begge sider av differensiallikningen, løs for $X(s)$, og se nøye på oppgave 1.

[2] Det er en dårlig vane å skrive $\mathcal{L}(x(t))$, for $x(t)$ er et tall, altså funksjonsverdien til funksjonen x i t.

Hemmeligheten ligger altså i relasjonen

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0).$$

Det er denne og lineariteten som lar oss skrive differensiallikningen om til en algebraisk likning som er triviell å løse. Det finnes en inversformel for laplaceomvending:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} X(s)e^{st}\, ds$$

men denne er for det første for komplisert for oss inneværende semester, og for det andre først og fremst av teoretisk interesse. Derfor er det nyttigst å bruke tabell for å invertere laplaceomvending, og da må vi nesten kjenne til en haug med laplaceomvendinger, slik at vi vet hva som korresponderer til hva. Du finner en kjempetabell appendiks i B i Balchens regtekklassiker, som ligger gratis på nettsidene til denne stramme karen:
`https://folk.ntnu.no/tronda`

Hvis du vil løse høyere ordens differensiallikninger, må du ha en derivasjonsregel til.

4 Vis at

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

Denne derivasjonsformelen kan generaliseres til den n-te deriverte, men den trenger du antageligvis ikke. Skal man regne på høyere ordens systemer må man stort sett til med numeriske metoder eller Diana:
`https://snl.no/DIANA_-_datamaskin`
La oss nå regne ut et par laplaceomvendinger og løse noen flere differensiallikninger. Finn X dersom (og husk å gjøre antagelser på s slik at livet smiler)

5 $x(t) = \cos t$

6 $x(t) = \sin t$

7 $x(t) = t^n \quad n \in \mathbb{N}$

og bruk laplaceomvending til å løse initialverdiproblemene
(her må du huske delbrøksoppspaltning)

8 $\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \qquad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$

9 $\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1$

10 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \qquad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$

11 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \cos t \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$

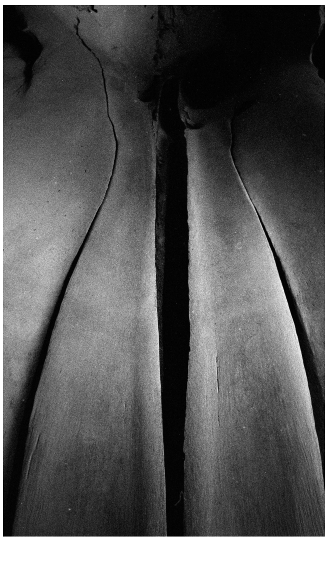
12 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin t \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$

13 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = t \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$

14 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = e^{i\omega t} \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$

15 $\ddot{x}(t) + x(t) = \cos t \qquad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$

16 $\dot{x}(t) + x(t) = e^{-t} \qquad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$



Jeg gjetter på at noen av disse var litt vel hårete, og at de fleste trenger noen hint her. La oss repetere delbrøksoppspaltning og utlede noen flere regneregler for laplaceomvending.

Så la oss først se på delbrøksoppspalting. Dette er en litt kjedelig teknikk for å splitte rasjonale funksjoner, altså funskjoner på formen

$$f = \frac{q}{p}$$

der q og p er polynomer. Det er vanlig å anta at q har lavere grad enn p. Hvis det ikke er tilfelle, er det bare å bruke polynomdivisjon og skrive

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{p(x)}$$

der s har lavere grad enn p. Polynomet r er trivielt å jobbe med, så vi kan konsentrere oss om brøken. La oss begynne med noe enkelt. For eksempel husker alle barn i barnehagen at

$$\frac{1}{x^2 - x)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x}$$

Hvordan finner vi ut dette om vi ikke vet det? Vel, først kan vi skrive $x^2 - x = x(x-1)$, og så kan man huske at det går an å skrive

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x}.$$

Dersom dette er korrekt måte å spalte på, vil det nå være mulig å beregne A og B. Har du bommet på formen, vil du få et likningssystem som ikke har løsning. Så kan man gange opp med $x(x-1)$ slik at man får

$$1 = Ax + B(x-1).$$

Siden to polynomer kun er like om de har de samme koeffisientene på hver orden av x, er denne likningen kun sann dersom

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= \quad -B \end{aligned}$$

som gir $B = -1$ og $A = 1$ og

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x}$$

som forventet. Den generelle prosedyren er ikke vanskelig, men litt langdryg å forklare, så jeg tror jeg setter ut dette til wikipedia. Se her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_fraction_decomposition#Procedure`
og her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_fraction_decomposition#Examples`
I korte trekk kan du spalte repeterte røtter slik:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

for eksempel:

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Prøv å spalte

17 $\frac{1}{x^2-4}$ **18** $\frac{1}{x^2(x-1)}$ **19** $\frac{1}{x^4-4x^2}$

20 Prøv oppgave 10-14 igjen om du ikke klarte dem på forrige forsøk.

Denne ukes oppgave 15 og 16 trenger du et triks du ikke kommer til å få så veldig mye bruk for, men oppgavene illustrerer et interessant poeng om resonans. Dette er noe som skjer dersom man påtrykker et signal som også er en homogen løsning. På folkemunne sier man gjerne at man påtrykker med resonansfrekvensen til systemet. Det er omtrent dette som skjer når du får fergen til å krenge ved å løpe frem og tilbake på dekk, eller når det feeder i mikrofonen.

21 La $y(t) = tx(t)$. Vis at

$$Y(s) = -\frac{d}{ds}X(s)$$

og prøv oppgave 15 og 16 igjen.

Jeg lovet i forrige uke at du skulle få en smartere teknikk for å hoste opp frekvensresponsen $H(i\omega)$. Her kommer den.

22 Regn ut frekvensresponsen til systemene i oppgave 8-16 over, og se nøye på laplaceomvendingene til lineæroperatorene på venstresidene.

La oss samle opp noen flere triks. Det finnes mange triks, men jeg har prøvd å plukke ut ting dere kan få bruk for, basert på de klassiske responsene. Her er en regel, t-skift:

23 Finn laplaceomvendingen til $u(t-a)$, vis at dersom $y(t) = x(t-a)u(t-a)$ er

$$Y(s) = e^{-as}X(s)$$

og skisser x og y.

Prøv disse igjen og se om du får samme svar (oppgave 16-19 i forrige uke):

24 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = u(t-2)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

25 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = u(t-1)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

26 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = u(t-1)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 1$

27 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = u(t-1) - u(t-2)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Den neste regelen kalles s-skift.

28 La $y(t) = e^{at}x(t)$, og vis at

$$X(s) = Y(s-a).$$

29 Regn ut laplaceomvendingene til $e^{at}\cos t$ og $e^{at}\sin t$ og prøv oppgave 10 på nytt.

30 Finn laplaceomvendingen til diracpulsen og løs initialverdiproblemet

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0.$$

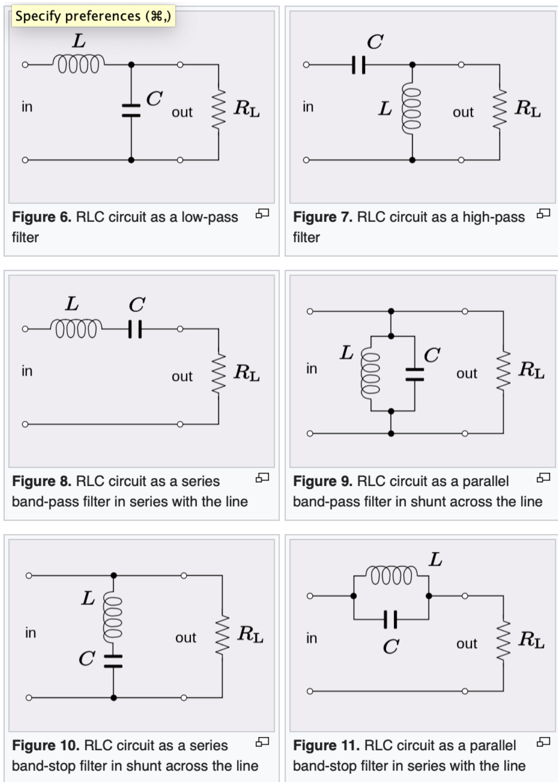
UKENS ELEKTRO- OG REGULERINGSTEKNIKK

Integrasjonsregel kan være greit å ha:

$\boxed{1}$ Vis at dersom $y(t) = \int_0^t x(u)\,du$, er

$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

siden Kirchhoffs spenningslov på RCL-krets gir en integro-differensiallikning.



$\boxed{2}$ Vis at strømmen i figur 8 tilfredsstiller

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\ \mathrm{d}\tau = v(t)$$

og løs når $R = 2$, $L = 1$, $C = 0.5$ og $v(t) = \cos t$. Anta $i(0) = i'(0) = 0$.

$\boxed{3}$ Finn strømmen når $v(t) = \delta(t-1)$.

$\boxed{4}$ Utled regnereglene

$$V = \frac{I}{sC}$$

og

$$V = sLI$$

for spole og kondensator ved å laplacetransformere de korresponderende regnereglene i tidsdomenet.

$\boxed{5}$ Finn systemfunksjonene til filtrene.

Se her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit`

UKENS ANALYSE

Det er en ting vi har skjøvet foran oss denne økten.

$\boxed{1}$ Kan du laplaceomvende $x(t) = e^{t^2}$?