15 - DREVNE SYSTEMER

I forrige semester løste vi de lineære likningene

$$\dot{x} + cx = 0$$

og

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Matematikere sier at disse likningene er **homogene**. Dette betyr at alle ledd i likningen inneholder den ukjente, og dersom likningen er lineær, danner løsningene et vektorrom. Matematikere kaller dem **de homogene løsningene**, mens ingeniører kaller dem **den naturlige responsen**.

$\boxed{1}$ Forklar at at de homogene løsningene er nullrommet til en lineæroperator dersom likningen er lineær. Hva er lineæroperatorene i likningene over?

Nullrommet til en lineæroperator T er alle x slik at

$$Tx = 0.$$

Dersom du trenger en repetisjon av dette, kan du løse

$\boxed{2}$ likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

eller

$\boxed{3}$ differensiallikningen $L(x) = 0$ der

$$L(x) = \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x$$

eller

$\boxed{4}$ differensiallikningssystemet $\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x} = 0$ der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Ser du noen fellestrekk mellom oppgavene?

Dersom vi slenger på en gitt funksjon av t på høyre side av likningen:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$$

sier matematikere at likningen er **inhomogen**. En fysiker eller ingeniør ville sagt at vi hadde et **drevet system**. Dette er fordi funksjonen f kjører på med sin egen greie uavhengig av hva løsningen x er på et bestemt tidspunkt. Du har allerede løst inhomogene systemer i lineæralgebraen, men vi kalte det ikke det, vi kalte det bare lineært likningssystem:

$\boxed{6}$ løs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

og

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eller Newtons avkjølingslov:

$\boxed{7}$ Løs $L(x) = f$ der

$$L(x) = \dot{x} + 2x$$

og

$$f(t) = 1.$$

eller vi kan klinke til og plukke en lavthengende frukt:

$\boxed{8}$ Løs $L(x) = f$ der

$$L(x) = \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x$$

og

$$f(t) = 1.$$

Hvis du studerer løsningene på de foregående oppgavene nøye (og har funnet alle mulige løsninger), vil du kanskje se alle problemene har løsninger på formen

$$x = x_h + x_p$$

der x_h er nullrommet til problemets lineæroperator og x_p er en løsning som skyldes at det er kommet noe greier som ikke er nullvektorene på høyre side av likningen. Vi kaller x_h den **den homogene løsningen** og x_p **den inhomogene løsningen** eller **partikulærløsningen**.

Ingeniører kaller likninger slik som $\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$ for **LTI-systemer**, eller **lineære og tidsinvariante systemer**. Lineær betyr at venstresiden er en lineæroperator på den ukjente, og tidsinvariant betyr at ingen av koeffisientene på x, $\dot{x}$ og så videre avhenger av t. Her et viktig triks: Siden

$$\frac{d}{dt}\left(x\left(t-t_0\right)\right) = \dot{x}(t-t_0)$$

ser vi at dersom

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$$

er $z(t) = x(t-t_0)$ en løsning av

$$\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) = f(t-t_0).$$

Tenk at du har en modell for en fysisk ting, en reaktor eller en krets eller en muskelcelle eller noe helt annet. Dersom systemet er i en eller annen stasjonær tilstand, gir modellen et algebraisk likningssystem, og dersom systemet er i dynamisk endring, gir modellen en differensiallikning. Ordet "system" kommer fra tanken om at du putter inn en funksjon på den ene siden av reaktoren eller kretsen og får ut en funksjon på den andre siden. Funksjonen du putter inn kalles **det drivende leddet** eller **påtrykket** eller **det inhomogene leddet** og settes alltid på differensiallikningens høyre side. Løsningen til differensiallikningen er det som kommer ut av systemet, og dette kalles systemets **respons**. Det er fem responser som er spesielt viktige i anvendelser:

Naturlig respons: Systemets respons på $f(t) = 0$

Frekvensrespons: Systemets respons på $f(t) = e^{i\omega t}$

Sprangrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$

Impulsrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$

Hvitstøyrespons: Systemets respons på $f(t) =$ hvit støy

Vi skal ta for oss disse i ro og mak. Den første kan du. De to neste kan du analysere med den verktøykassen du har, men for impulsresponsen og hvitstøyresponsen må vi ha mer avansert verktøy. Alle responser henger litt sammen med hverandre på ymse vis.

La oss begynne med den enkleste, **frekvensresponsen**. Du vet at eksponensialfunksjonen er egenvektor til derivasjonsoperatoren:

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

og dette bør gi deg et ganske bra hint om hvordan du kan løse

$\boxed{9}$ $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{i\omega t}$

Siden eksponensialfunksjonen er egenvektor til derivasjonsoperatoren, er dette veldig kjapt å regne ut. Fasit på oppgaven over er

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-t}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right) + \frac{1}{(i\omega)^2 + 2i\omega + 2} e^{i\omega t}$$

Partiklulærløsningen skrives gjerne

$$x_p(t) = \frac{1}{(i\omega)^2 + 2i\omega + 2} e^{i\omega t} = H(i\omega) e^{i\omega t}$$

der H er noe som kalles **systemfunksjonen** i elektroteknikk og **transferfunksjonen** i reguleringsteknikk og prosessteknikk. Materialteknikere tror jeg bare kaller den **impedansen**. Alle bruker den til mange forskjellige ting:

- `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8512860/`
- `https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/frequency-response-curve`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Transfer_function`

Systemets egenvektor $e^{i\omega t}$ har egenverdi $H(i\omega)$, og det er denne de fleste ingeniører snakker om når de sier "frekvensresponsen". Frekvensresponsen forteller noe om hvordan systemet reagerer på forskjellige frekvenser. Nå lurer du sikkert på hvorfor vi ikke bruker sinus eller cosinus når vi har lyst til å påtrykke en bestemt frekvens, og svaret at det kunne vi gjort, men disse er ikke egenvektorer til LTI-systemer (unntatt i noen sære tilfeller), og derfor er de håpløst knotete å regne på. Hvis du på død og liv vil bruke cosinus istedet for eksponensialfunksjonen kan du det, men da er det best å utnytte lineariteten, sette $H(i\omega) = r(\omega)e^{i\phi(\omega)}$, og beregne

$$\begin{aligned}
L(\cos \omega t) &= L\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(L\left(e^{i\omega t}\right) + L\left(e^{-i\omega t}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(r(\omega)e^{i\phi(\omega)}e^{i\omega t} + r(\omega)e^{-i\phi(\omega)}e^{-i\omega t}\right) \\
&= \frac{r(\omega)}{2}\left(e^{i(\omega t + \phi(\omega))} + e^{-i(\omega t + \phi(\omega))}\right) = r(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))
\end{aligned}$$

Her ser vi tydelig at frekvensresponsen er en skalering $r(\omega) = |H(i\omega)|$ av amplituden (denne kalles **amplituderesponsen**) og en faseforskyvning $\phi(\omega)$ (denne kalles **faseresponsen**). Den komplekse eksponensialfunksjonen er bare en praktisk måte å herje med alt på, ikke noe mer. I neste uke skal vi se på en penere måte å hoste opp H på.

$\boxed{10}$ Utledningen over tror jeg vi tar på eksamen.

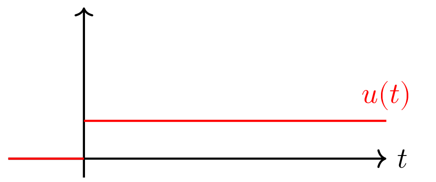
Det går ellers an å støte på noen litt rare problemer av og til. Oppgaven under handler om noe som kalles resonans.

$\boxed{11}$ Løs $\ddot{x} + x = \cos \omega t$. Men hva skjer når $\omega = 1$? Hvorfor heter det resonans?
(Hint: Frekvensresponsen bryter sammen når $\omega = 1$, og partikulærløsningen blir istedet $x_p(t) = Ct \sin t$. Plott denne, så ser du.)

Man får mye informasjon om et system ved å se hvordan det reagerer når man sender gjennom sinusoidale påtrykk. I akustikk, elektro, impedansspektroskopi og en del andre anvendelser er det frekvensresponsen som råder grunnen. Moderne musikkteknologi er utenkelig uten frekvensrespons. På femtitallet da frekvensanalysen var rykende fersk, var frekvensresponsen også viktig i prosessteknikk; man analyserte prosessanlegg ved å påtrykke forskjellige frekvenser og studere responsen. Men nå analyserer man visst prosessanlegg ved å bare åpne kranen, skru på trykket og se hva som skjer. Dette kalles **sprangrespons**, og er veldig viktig i mange former for reguleringsteknikk.

La oss begynne med å definere **enhetssprangfunksjonen**

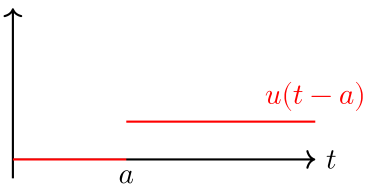
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$



Denne kan du tenke på som en bryter som slår noe på ved tiden $t = 0$.

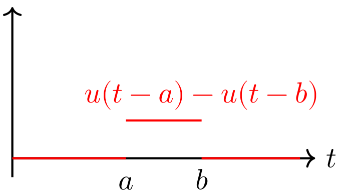
Den kalles også heavisidefunksjonen etter Oliver Heaviside som introduserte bruken av denne i elektroteknikken. Vi kan slå på ved tiden $t = a$ istedet:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$



eller slå på ved $t = a$ og av igjen ved $t = b$:

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } t \geq b. \end{cases}$$



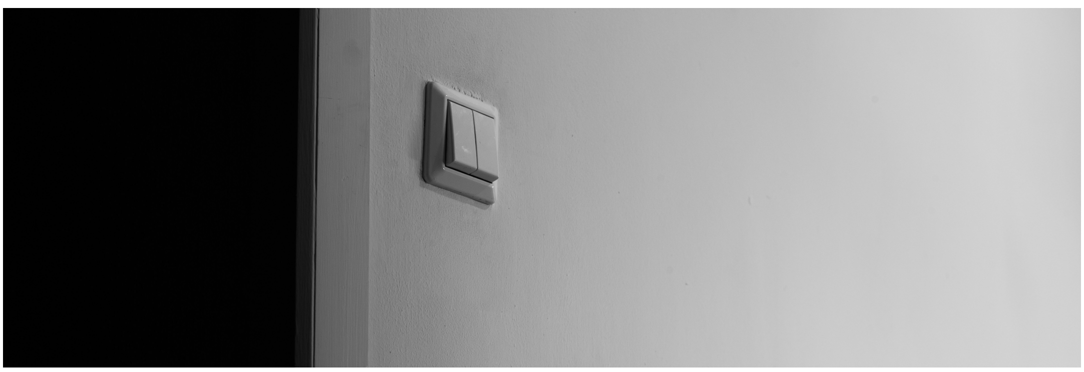
Løs initialverdiproblemene og plott:

$\boxed{12}$ $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t-1)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$
(Hint: Bruk oppg. 8 og $x(t - t_0)$-trikset.)

$\boxed{13}$ $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t-2)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$\boxed{14}$ $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t-1) - u(t-2)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$
(Hint: Bruk 12 og 13.)

$\boxed{15}$ $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t-1)$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 1$
(Hint: Bruk oppg 12 og naturlig respons og linearitet.)



Vi har egentlig ikke verktøy til å håndtere **impulsresponsen** ennå, og i neste uke skal du få et bedre verktøy. Men det går an å fikle litt med den allikevel. Diracpulsen brukes til å modellere impuls, altså energitilførsler der den påtrykte kraften er ekstremt høy og ekstremt kortvarig, som for eksempel ved hammerslag eller høye smell:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function`
For unge mennesker pleier diracpulsen å bli introdusert slik:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

men dette er i bunn og grunn meningsløst, og dessuten litt forvirrende, for definisjonen forteller deg ingenting om hvordan du skal oppføre deg når du ser diracpulsen i en differensiallikning.

Det er mye bedre å tenke slik: Dersom f er massetettheten til et endimensjonalt objekt, er

$$\int_a^b f(s)\,ds = \text{massen til objektet mellom } a \text{ og } b$$

og diracpulsen er bare en snedig måte å matematisk plassere et enkilos fiskelodd i origo:

$$\int_a^b \delta(s)\,ds = \begin{cases} 1 & a \leq 0 \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Dette forteller deg alt du trenger å vite om diracpulsen, for eksempel at

$$\int_a^b \delta(x-s)\,ds = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(x-s)\,ds = f(x).$$

Den siste er kanskje ikke helt triviell, men følg von Neumanns råd og venn deg til det. Poenget er at diracpulsen kun gir mening når den opptrer under et integraltegn. Den er noe som kalles en distribusjon, og et ordentlig studium av distribusjoner regnes som noe for vanskelig for disse emnene. Jeg kan trøste deg med at diracpulsen ble oppfunnet av en fysiker, Paul Dirac:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac`
Det var ingen som tok diracpulsen seriøst til å begynne med, men Dirac fikk til slutt fikk nobelprisen i 1933 for sitt arbeid med kvantemekanikk, sammen med med Erwin Schrödinger. [1]

Siden diracpulsen gir mest mening under integraltegn, gir det nå mening å ta noe som vi på Gløshaugen kaller Balchens foldingstriks (siden Jens Balchen var den kuleste fyren på Gløshaugen og Gløshaugen er verdens navle), men som resten av verden kaller **variasjon av parametre**. Dette er ser rart ut, men funker bra. Siden $x_h = e^{-at}$ er en homogen løsning av $\dot{x} + ax = f$, er

$$x = cx_h = ce^{-at}$$

[1] Dirac var ganske fåmælt. Etter ham har vi en måleenhet for talestrøm:

$$\text{en dirac} = \text{ett ord per time}$$

også en homogen løsning uansett hva c er, så lenge c er en konstant. Men hm, hva om vi lar c være en funksjon av t, og antar at det går an å skrive

$$x_p = c(t)e^{-at}?$$

Det er lettere å forstå hvor denne ideen kommer fra når man studerer systemer av differensiallikninger, så det skal vi komme tilbake til, men la oss nå teste ut hva som skjer. Dersom vi setter x_p inn i likningen, får vi

$$\dot{c}(t)e^{-at} - c(t)ae^{-at} + ac(t)e^{-at} = f(t)$$

eller

$$\dot{c}(t)e^{-at} = f(t)$$

om du vil. Vi kan nå gange opp med e^{at} og integrere:

$$c(t) = \int_0^t f(s)e^{as}\,ds$$

slik at den endelige løsningen blir

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x(0)e^{-at} + e^{-at}\int_0^t f(s)e^{as}\,ds$$

$$= x(0)e^{-at} + \int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}\,ds$$

$\boxed{16}$ Denne tror jeg også vi tar på eksamen.

And now...

$\boxed{17}$ $\dot{x} + x = \delta(t-1)$
$x(0) = 0$

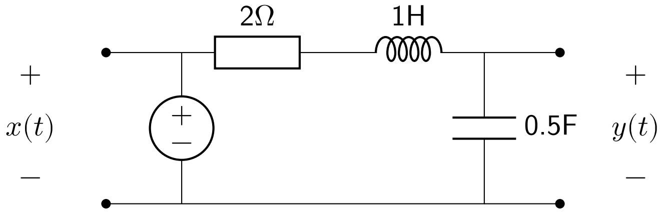
$\boxed{18}$ $\dot{x} + x = \delta(t-2)$
$x(0) = 0$

$\boxed{19}$ $\dot{x} + x = \delta(t-1)$
$x(0) = 1$

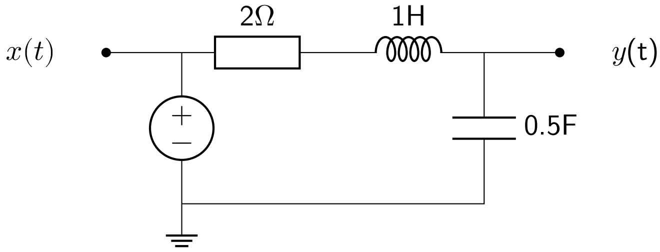
Andre ordens likninger og diracpuls må vi vente med til neste uke. Da får vi laplaceomvending.

UKENS ELEKTRO- OG REGULERINGSTEKNIKK

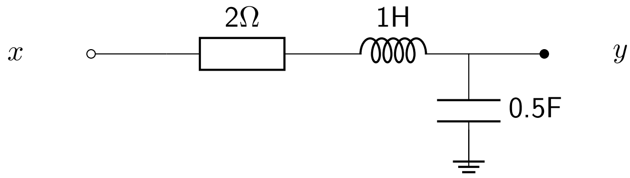
Man kan tegne RCL-filtre litt forskjellig. Balchen tegner noe slikt:



eller kanskje noe slikt:



men Lars liker best å tegne noe slikt:



$\boxed{1}$ Uansett. La den ukjente være spenningen y fra kondensatoren til jord, bruk Kirchhoffs spenningslov til å vise at

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f$$

og plott x dersom spenningskilden f blir satt til 1V ved $t = 1$ etter å ha stått av en lang stund. (Jada jada jeg vet at komponentverdiene er helt urealistiske og at Lars liker spenningsdeling bedre enn Kirchhoffs spenningslov og at elektroteknikere gjerne vil slippe å løse differensiallikninger og alt det der, men gjør det allikevel.)

$\boxed{2}$ Prøv også $f(t) = e^{i\omega t}$.

Her er til slutt noen varianter av kretsene over, men med litt mer reallistiske verdier på komponentene. Koble opp kretsene på brødbrettet, send inn forskjellige frekvenser, mål med et eller annet redskap (finn en makker fra elsys eller gå på OV og spør om du ikke har), og sammenlikne med analytisk løsning.

$\boxed{3}$ $0.1y\ddot{x} + 3000\dot{x} + 200000x = e^{i\omega t}$

$\boxed{4}$ $0.1\ddot{x} + 2000\dot{x} + 200000x = e^{i\omega t}$

$\boxed{5}$ $0.1\ddot{x} + 100000x = e^{i\omega t}$

UKENS KJEMI

Fra Skogestads prosessteknikkbok: Les kap. 11.3 og gjør oppgavene.

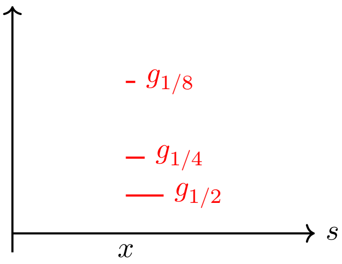
UKENS NØTTER

Her er en alternativ definisjon av diracpulsen. La

$$g_k(s) = \begin{cases} 1/k & \text{for } 0 < s < k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi definerer

$$\delta(t) = \lim_{k \to 0} g_k(t)$$



1. Man tenker som sagt på diracpulsen som noe som plukker ut funksjonsverdier fra integraler. Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(x-s)\,ds = f(x).$$

2. Prøv å løse $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$ $\qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

3. Enhetssprangfunksjonen kalles også heavisidefunksjonen etter Oliver Heaviside, som introduserte den i elektroteknikken:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside`
Det er ikke helt uvanlig at ingeniører tenker på diracpulsen som den deriverte til denne. Forklar.

4. I $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t-1)$ forekommer en dobbelderivert, så det er jo naturlig å tenke at en løsning x bør være to ganger kontinuerlig deriverbar, slik at man kan sjekke om den passer i likningen. Er den det?