13 - REGULARITET

Vitenskap handler om å konstruere modeller, og en modells kvalitet bedømmes ut fra dens evne til å generere korrekte og ikketrivielle prediksjoner. En modell trenger bare være god nok for anvendelsen. På institutt for teknisk kybernetikk er det visstnok ansett som barskt å klare å regulere en prosess uten å ha en god modell for prosessen.

Den katolske kirke mente på 1600-tallet at jorden var universets sentrum og at solen, planetene og stjernene gikk i bane rundt oss. Dette er en helt grei modell dersom du aldri trenger å lage noe mer avansert enn en kalender. [1] Men da Galileo Galilei bygget seg et refraksjonsteleskop og og oppdaget at Jupiter hadde minst fire måner og at Venus hadde faser og at Saturn så veldig rar ut, måtte denne modellen sakte men sikkert hives på havet. [2] Den geosentriske modellen er god nok om du bare trenger noen grove anslag for hvor planetene kommer til å befinne seg om en liten stund, men den bommer ganske bra fra tid til annen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Geocentric_model`

På 1500-tallet satt Tycho Brahe nede på en øy han hadde fått og festet og drakk og observerte stjernehimmelen ganske nøye forskjellige måleapparater han hadde bygget:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe`
Han målte så mye og så bra at hans student Johannes Kepler klarte å skrive opp empiriske lover for planetbanene, idag kjent som Keplers lover:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion`
Isaac Newton fant opp derivasjon i 1687 og viste at Keplers elliptiske planetbaner kunne forklares dersom gravitasjonskraften gikk som $1/r^2$, der r er avstanden mellom planetenes massesentre. Den klassiske mekanikken var født, og nå er det å sende sonder ut i verdensrommet en standardanvendelse:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Hohmann_transfer_orbit`

$\boxed{1}$ I den klassiske mekanikkens åndelige sentrum sitter differensialoperatoren:

$$T(x) = \dot{x}$$

Den er lineær, takk og lov, ellers hadde romfart blitt unødvendig knotete. Men hvordan vet vi egentlig at den er lineær?

[1] De første kalenderne var reguleringssystemer, der man kontinuerlig justerte kalenderen etter månefasene: `https://en.wikipedia.org/wiki/Calendar`

[2] Kardinal Bellarmine, ansvarlig for å brenne Giordano Bruno på staken og gi Galilei husarrest, er den dag i dag helgen i den katolske kirke. `https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_affair`

Jeg har dårlige nyheter. Vi er nå nødt til å studere konseptet grenseverdi. Dette er et konsept som er hatet av studenter på hele kloden, men nødvendig for å kunne svare på oppgaven over. Hvis du synes det som kommer under her er teknisk og uforståelig, kan jeg trøste deg med at Isaac Newton klarte å finne opp både derivasjon og integrasjon uten å ha en presis ide om hverken reelle tall eller grenseverdier, så det fullt mulig å hoppe over hele denne undervisningsuken og allikevel opparbeide en grei arbeidskunnskap om kalkulus. Men dette er et kurs i matematikk, og moderne matematikk er utenkelig uten grenseverdier. Vi kan takke Cauchy for tingenes tilstand i dag:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy`

Vel vel. Den deriverte er definert ved

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

eller

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eller

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

om du vil.

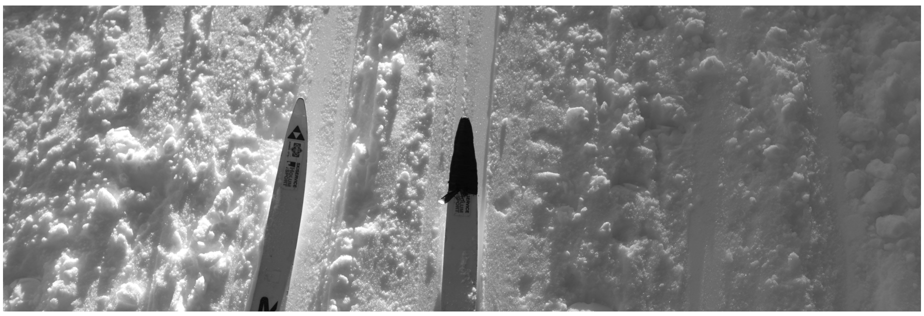
Hvis du trenger å leke med definisjonen av den deriverte for å få en følelse for hva dette prøver å si, kan du se her:
`https://tma41x1.math.ntnu.no/12/intro_derivasjon/`
Men vi er altså nødt til å studere hva vi mener med denne:

$$\lim_{h \to 0}$$

Jeg kunne tværet det ut litt til, men det er kanskje bedre å rive plasteret rett av.

> En funksjon f sies å ha grenseverdien L i x_0 dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen
>
> $$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$
>
> holder. Vi skriver i så fall
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

$\boxed{2}$ Pugging er uglesett blant matematikere. Men det kreves en del tankevirksomhet for å forstå denne definisjonen, og dersom du ikke husker den, kan du heller ikke fundere over den når du går på ski. [3]



[3] https://hbr.org/2021/01/your-best-ideas-are-often-your-last-ideas

$\boxed{3}$ Bruk definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Neida bare tuller. Det er ikke slik man bruker denne definisjonen. Det er mer noe i denne gaten:

$\boxed{4}$ Vis at en grenseverdi er entydig dersom den eksisterer.

og dette er så teoretisk stoff at jeg tror vi skal gjøre det enkelt.

1: Dere får en oppgave.

2: Jeg viser hvordan den skal løses.

3: Oppgavene kommer potensielt på eksamen slik de er formulert her.

Her kommer oppgave 4:

$\boxed{\text{4 - LF}}$ Anta vi har to grenseverdier $L_1 \neq L_2$, slik at

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2.$$

Velg en eller annen $0 < \epsilon$, og δ_1 slik at

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2$$

dersom $|x - x_0| < \delta_1$. Men vi kan også velge δ_2 slik at

$$|f(x) - L_2| < \epsilon/2,$$

og tar vi den minste av δ_1 og δ_2, er både

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2 \quad \text{og} \quad |f(x) - L_2| < \epsilon/2$$

Men nå er

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) - (L_2 - f(x))| \leq |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/ = \epsilon$$

Her kommer poenget. Vi skal etter definisjonen ha mulighet til å velge akkurat den $\epsilon > 0$ vi vil men her står det svart på hvitt at vi alltid må ha

$$|L_1 - L_2| < \epsilon$$

uansett hva ϵ måtte være. Dette betyr at dersom vi krever at $L_1 \neq L_2$, er dette i konflikt med hele definisjonen av grenseverdi, og følgelig må vi $L_1 = L_2$ dersom begge skal være grenseverdi for f i x_0.

Du må kanskje pugge litt, men det er enda bedre å prøve å forstå. Når man kommer over en viss alder er det nesten umulig å huske random greier, og sjimpanser banker visst oss i Kims lek: `https://www.scientificamerican.com/article/chimps-outplay-humans-in-brain-games1/` eller gjør det egentlig det? `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspb.2019.0715#d1e1220`

$\boxed{5}$ Vis at dersom

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2$$

er

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) + f_2(x) = L_1 + L_2$$

$\boxed{\text{5 - LF}}$ Vi må vise at det går an å velge $\delta > 0$ slik at $|x - x_0| < \delta$ impliserer

$$|f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$|f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| = |f_1(x) - L_1 + f_2(x) - L_2| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2|$$

Siden f_1 har grenseverdien L_1, og f_2 har grenseverdien L_2, kan vi velge $\delta > 0$ slik at $|x - x_0| < \delta$ impliserer

$$|f_1(x) - L_1| < \epsilon/2 \quad \text{og} \quad |f_2(x) - L_2| < \epsilon/2.$$

(Samme argument som over, du kan velge δ_1 for den ene ulikheten og δ_2 for den andre og så bare velge den minste av dem.) Men i så fall impliserer $|x - x_0| < \delta$ at

$$|f_1(x) - L_1 + f_2(x) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

Hvis du nå leser definisjonen av grenseverdi nøye, ser du at her står det jo at grenseverdien til $f_1 + f_2$ er $L_1 + L_2$.

$\boxed{6}$ Vis at dersom a er en konstant og

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

er

$$\lim_{x \to x_0} af(x) = aL$$

$\boxed{\text{6 - LF}}$ Denne er så lik den over at du kan prøve selv. Dette betyr at dersom denne kommer på eksamen, kommer jeg til å klassifisere den som vanskeligere enn 4 og 5, siden du nå må skrive ut detaljene på egenhånd. (Vi må ha noen oppgaver for å skille mellom A og B.)

Nå tar vi differensialoperatoren en passant:

$\boxed{7}$ Vis at differensialoperatoren er lineær.

$\boxed{\text{7 - LF}}$ Bruk oppgave 5 og 6.

og så går vi videre til noe som kalles skviseteoremet:

Dersom
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$
og
$$f \leq g \leq h$$
er
$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

$\boxed{8}$ Vis.

$\boxed{\text{8 - LF}}$ Velg $\epsilon < 0$, og velg $\delta < 0$ slik at både

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{og} \quad |h(x) - L| < \epsilon$$

Den første ulikhetene gir at
$$h(x) - L < \epsilon$$
og siden $g(x) < h(x)$, må vi ha at
$$g(x) \leq h(x) \Longrightarrow g(x) - L \leq h(x) - L < \epsilon$$
Men av $|f(x) - L| < \epsilon$ følger at $f(x) - L < \epsilon$, og vi må ha
$$-g(x) \leq -f(x) \Longrightarrow L - g(x) \leq L - f(x) < \epsilon$$
eller
$$g(x) - L > -\epsilon$$
om du vil. Vi har altså at
$$-\epsilon < g(x) - L < \epsilon$$
som er en alternativ skrivemåte for
$$|g(x) - L| < \epsilon$$

I forelesning skal jeg bruke dette til å beregne en viktig grenseverdi:

$\boxed{9}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Nå kan vi skrive opp definisjonen på kontinuerlig funksjon.

En funksjon f er kontinuerlig i $x = a$ dersom

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

10 Vis at

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$. (Denne kalles gjerne sinc-funksjonen, og er veldig viktig i elektroteknikk.)

For ikke å snakke om deriverbar funksjon:

En funksjon f er deriverbar i x dersom

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer.

11 Vis at en deriverbar funksjon må være kontinuerlig.

11 - LF Dersom brøken

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

skal ha en grenseverdi når $h \to 0$, må

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

som er det samme som å si at f må være kontinuerlig i x.

En merkelig fun fact er at en funksjon kan være deriverbar til tross for at den deriverte ikke er en kontinuerlig funksjon.

$\boxed{12}$ Vis at

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

ikke eksisterer.

$\boxed{13}$ Vis at

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig, men ikke deriverbar, i $x = 0$.

$\boxed{14}$ Vis at

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$. Er f' kontinuerlig i $x = 0$?

En funksjon f er n **ganger deriverbar** i x dersom den n-te deriverte eksisterer i x.
Dersom den n-te deriverte er en kontinuerlig funksjon, sier vi at f er n **ganger kontinuerlig deriverbar**, og vi skriver $f \in \mathcal{C}^n$.
Dersom f kan deriveres uendelig mange ganger uten å støte på noen problemer, sier vi at f er **glatt**, og skriver $f \in \mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{15}$ La

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Er $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$? $\quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? $\quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$?