12 - INTEGRALET

Planckfordelingen

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

er et eksempel på noe som kalles **sannsynlighetstetthetsfunksjon**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function`
Sannsynlighetstetthetsfunksjoner dukker opp i de fleste anvendelser, og sannynlighetsregning kommer for fullt rett etter jul i et vanskelig (men godt organisert) fag som heter TMA4245.

$\boxed{1}$ Les deg opp og forklar en kamerat hva en sannsynlighetstetthetsfunksjon er, og hva dette har med integralet å gjøre.

En annen viktig sannsynlighetstetthetsfunksjon er Maxwell-Boltzmann-fordelingen

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

som forteller noe om fordelingen av hastighetene til partikler i en gasstank (noen partikler har høy fart, mens andre har lav fart):
`https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution`
Hvis du klarte oppgave 1, har du nå skjønt at man finner sannsynligheter ved å integrere sannsynlighetstetthetsfunksjonen. Sannsynligheten for at en stokastisk variabel X med sannsynlighetstetthet f havner mellom a og b i et forsøk, er:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Hvis ikke dette er en god motivasjon for å forstå integralet, vet ikke jeg. Men vi har et problem.

$\boxed{2}$ Klarer du å antiderivere Planckfordelingen? Hva med Maxwell-Boltzmann-fordelingen?

Analysens fundamentalteorem er viktig, men overdreven bruk kan gi deg en sterk bias:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Bias`
nemlig at

> INTEGRASJON = ANTIDERIVERIVASJON

Det er **feil**. La oss se på enda en funksjon som ikke er så lett å antiderivere.

$\boxed{3}$ Arealet under grafen til $f(x) = e^{-x^2}$ og mellom $x = 0$ og $x = 1$ skrives

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 0.7468241328...$$

Finn dette arealet til ti desimalers presisjon på en eller annen måte uten wolframalpha.

I mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Funksjonen e^{-x^2} har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en enkel måte, og andre funksjoner har så kompliserte antideriverte at man kan miste interessen for livet av mindre: [1]

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)}\, dx = \\
&-\Bigg(\Bigg(\log(\cos(x)) \Bigg(2 \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left((1+i)-(1-i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right) + \\
&\quad 2 \operatorname{Li}_2\left(-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(-i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2 \operatorname{Li}_2\left(\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2 \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+(1+i)\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+(1-i)\right)\right) + \\
&\quad \log^2\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right) + \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right) + \\
&\quad 4\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \log(4)\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(1-i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\log\left(1+i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad \log(4)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg/ \\
&\left(4\left(\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)+\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)+\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)\right)\Bigg) + \text{constant}
\end{aligned}$$

[1]Wolphramalpha gjør heldigvis ikke det.

Skal du forstå integralet, må du forstå hva en **riemannsum** er:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum`
Disse brukes til å definere integralet, men kan også brukes til å finne en tilnærming til arealet under grafen. En riemannsum er i bunn og grunn et histogram der søylehøydene er minimums- og maksimumsverdiene til f på hver søylebase.

4 Les deg opp på hva en riemannsummer, og finn

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

til maskinpresisjon ved hjelp av riemannsummer. (Hvis du brukte riemannsummer i oppgave 1, kan du selvfølgelig bare gå videre.)

Det er mange grunner til å elske funksjonsuttrykket e^{-x^2}. En viktig grunn er at den dukker opp i naturen. Du har sikkert hørt om normalfordelingen eller gausskurven:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution`
Dette er et av de viktigste eksemplene på sannsynlighetstetthetsfunksjon, og i TMA4245 skal du bli ganske dreven i denne. Standardnormalfordelingen har sannsynlighetstetthetsfunksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Sannsynligheten for at en standardnormalfordelt stokastisk variabel Z havner mellom a og b i et forsøk, er:

$$P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,dx$$

Du vet forhåpentligvis nå at standardnormalfordelingsfunksjonen ikke har noen antiderivert som er lett å evaluere.

5 Les litt mer om normalfordelingen (for eksempel kap. 24.8 i Kreyszig eller i kap. 7.8 i Adams), og lag en pythonfunksjon som tar inn a og b og returnerer $P(a < Z < b)$ ved riemannsummer.

Definisjonen på integral går omtrent slik:

Integralet

En partisjon P av intervallet $[a, b]$, er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i, der $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a, b]$. La

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad \text{og} \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Den øvre og nedre riemannsummen til f på partisjonen P er henholdsvis:

$$U(P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i \quad \text{og} \quad L(P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

Dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av intervallet $[a, b]$ slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

sier vi at f er integrerbar.

En riemannsum er et histogram, og dersom f er integrerbar, går histogrammets totale areal mot integralet til f på $[a, b]$ når partisjonen blir finere. Integrerbarhet betyr bare at arealet under grafen er veldefinert; hvorvidt funksjonen er mulig å antiderivere, er irrelevant. Normalfordelingsfunksjonen e^{-x^2} er integrerbar selv om den ikke har noen pen antiderivert.

Hvis du leser definisjonen over nøye, ser du at riemannsummene vi bruker til å definere integralet er ute etter maksverdiene på hvert delintervall. I praktisk bruk av riemannsummer er det enklere å bruke noe som kalles høyre og venstre riemannsum:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum#Some_specific_types_of_Riemann_sums`

$\boxed{6}$ Tegn og forklar til en kamerat hva høyre og venstre riemannsum er for noe.

Fordelen med høyre og venstre riemannsum er at gjennomsnittet av dem blir en mye bedre integrasjonsmetode som kalles trapesmetoden:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule`

$\boxed{7}$ Modifiser koden du skrev i oppgave 5 til å bruke trapesmetoden istedet for riemannsummer.

$\boxed{8}$ Finn en tilnærming til

$$\int_0^{\pi} \text{sinc}(x)\, dx \approx 1.85193705196$$

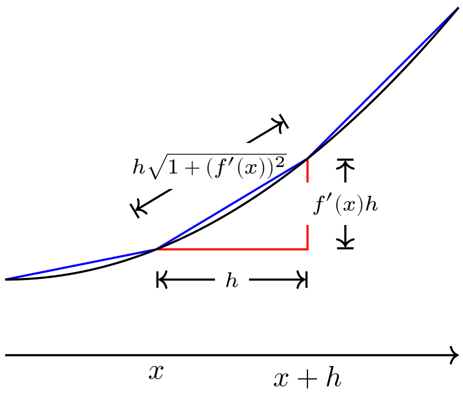
ved å bruke både riemannsummer og trapesmetoden. [a] Sammenlikne nøyaktigheten mellom metodene når du bruker samme h.

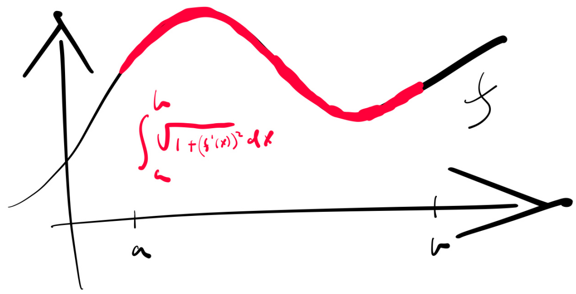
[a] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function`

Når man lærer om integralet første gang, er det hensiktsmessig å fokusere på areal, for dette er ikke verre enn at Arkimedes klarte å beregne kompliserte areal for over to tusen år siden. Man trenger bare barneskolegeometri (arealet av et rektangel) og en litt komplisert grenseverdiprosess, og vips så er man i mål. Men integralets styrke består i at arealet til de små rektanglene i histogrammet ikke trenger å representere areal. All mat blir bedre med ketsjup. Slik er det også med integralet:

INTEGRALET KAN BRUKES TIL ALT.

Hvis du skjønner dette og riemannsummer og tar en titt på disse figurene





vil du kanskje se at

Buelengde

Lengden av grafen til f fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ er

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\boxed{9}$ Finn buelengden til $y = x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$.
(Denne går med et nødskrik med penn og papir.)

Likningen for en sirkel

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{eller} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

om du vil. En generalisering av denne er likningen for en ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Punktene som passer i denne likningen ligger på en ellipse som er sentrert i origo og har halvakser a og b. Planetene går stort sett rundt solen i ellipsebaner:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse`

$\boxed{10}$ Finn omkretsen av en ellipse med halvakser 1 og 2.
(Denne går ikke med penn og papir. Prøv både riemannsummer og trapesmetoden.)

$\boxed{11}$ Finn lengden av en periode av sinuskurven. (Dette integralet kan heller ikke beregnes analytisk.)

Hvis du har skjønt riemannsumtankegangen og at integralet kan brukes til alt, ser du kanskje at

Omdreiningslegeme

Volumet av omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x)$ en gang om x-aksen,

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

$\boxed{12}$ Drei litt på en bit av sinusfunksjonen, for eksempel mellom to av nullpunktene, og finn volumet.

$\boxed{13}$ Klarer du å vise at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3} r^3$?

Nå er vi for øvrig i en posisjon til å forklare følgende oppgave:

$\boxed{14}$ Løs Newtons avkjølingsproblem

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \qquad\qquad T(0) = \frac{1}{10}$$

med Eulers ekspisitte metode

$$T_{n+1} = T_n + h(2 - T_n)$$

og med trapesmetoden

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{2}(2 - T_n + 2 - T_{n+1})$$

og plott begge i samme plott som den analytiske løsningen

$$T(t) = 2 - \frac{19}{10} e^{-t}.$$

Bruk et litt grovt tidssteg, for eksempel $h = 0.1$. Kan du forklare hvorfor trapesmetoden approksimerer den analytiske løsningen mye bedre enn Eulers eksplisitte metode?

Trikset er nå å ta differensiallikningen

$$\dot{x} = f(x)$$

integrere

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x}\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x)\, dt$$

Dersom vi setter inn approksimasjonene $x_n \approx x(t_n)$ og $x_{n+1} \approx x(t_{n+1})$ på venstre side og approksimerer integralet på høyre side med forskjellige numeriske integrasjonsmetoder, får vi

$$\begin{aligned}
\text{Euler eksplisitt:} \quad & x_{n+1} = x_n + h f(x_n) \\
\text{Euler implisitt:} \quad & x_{n+1} = x_n + h f(x_{n+1}) \\
\text{Trapesmetoden:} \quad & x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n) + f(x_{n+1})\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{15}$ Ser du hvilken numerisk integrasjonsmetode korresponderer med de tre metodene? Hvorfor tror du trapesmetoden er mer nøyaktig enn de to andre?

Viggo Brun [2] skal ha sagt:

> Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!

Det han mente å si, var nok at derivasjon er ganske lett (det er bare å bruke noen regneregler), mens antiderivasjon kan være ganske vanskelig. Et tilforlatelig funksjonsuttrykk kan være enten lett eller vanskelig eller fullstendig håpløst å antiderivere, og det er ofte umulig å avgjøre hvilken av disse som er tilfellet før man har prøvd å antiderivere. Kanskje er det til og med lett, men man kan ikke akkurat det trikset som må brukes. Man kan bruke et liv på å trene på antiderivasjon. Hvis jeg vil lage en integrasjonsoppgave på eksamen som ingen studenter får til, er det bare å gi

$\boxed{16}$ Finn

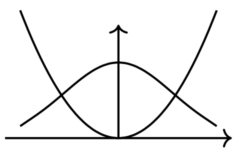
$$\int \frac{\log \cos x}{\sin 2x}\, dx$$

Så moralen er: det som er viktig å skjønne med integralet, er hva det betyr.

> Integralet betyr å summere opp noe.

UKENS KJEMI

Når man jobber med den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator`
støter man på en situasjon der man må finne arealet under kurven $y = e^{-ax^2}$ og utenfor $y = bx^2$, der $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter.



[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Viggo_Brun`

$\boxed{1}$ Finn skjæringspunktene mellom de to kurvene.

$\boxed{2}$ Lag en funksjon som tar inn a og b, og beregner en tilnærming til arealet. (Her må du antagelig vite at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

men hvordan man ser dette må vi vente med til et senere semester.)

Vegard har også laget en oppgave om integralet og Schrödingerlikningen, se oppgave 4.1 her: `https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/martaoppgaver.pdf`

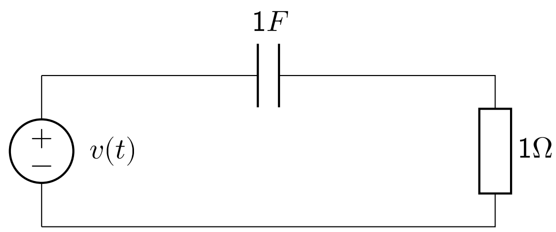
UKENS ELEKTROTEKNIKK

Integralet er en summeringsprosess. Vi kan summere opp mange ting som ikke er areal. For eksempel kan basen i riemannsumhistogrammet være et tidsintervall på t-aksen, også kan $x(t)$ angi strømstyrke som funksjon av tiden. I så fall blir $x(t)h$ litt ladning, og

$$\sum x(t)h \to \int_a^b x(t)\,dt$$

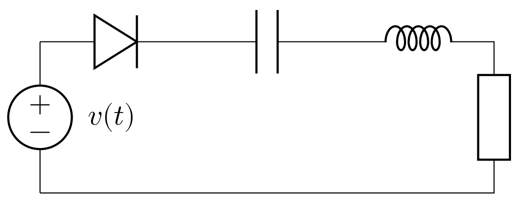
blir total ladning mellom tidspunktene $t = a$ og $t = b$.

La oss si at spenningskilden har stått på en god stund slik at kondensatoren blir ladet opp, og så blir spenningskilden slått av ved $t = 0$ slik at $i(0) = 1$.



$\boxed{1}$ Hvor mye ladning har passert gjennom motstanden når kondensatoren er utladet?

Kretsen under er en dårlig frekvensfordobler.



$\boxed{2}$ Samme her, anta at $i(0) = 1$ etter at spenningskilden er slått av. Hvor mye ladning har passert gjennom motstanden når kondensatoren er utladet?

UKENS REGULERING

Den enkleste numeriske metoden for å løse en differensiallikning

$$\dot{x} = f(x)$$

numerisk, er Eulers eksplisitte metode

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n).$$

Men det finnes tusenvis av varianter og forbedringer, for eksempel Runge-Kutta-metoder:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods`
flerstegsmetoder:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_multistep_method`
og mer avanserte metoder:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group_integrator`

I Simulink kan man velge mellom en haug av disse metodene, og man kan spørre seg hvorfor det er så mange. En klassisk metode som kalles Heuns metode fåes ved å sette inn et eksplisitt eulersteg som approksimasjon til x_{n+1} på høyre side i trapesmetoden.

$\boxed{1}$ Gjør dette og utled uttrykket for Heuns metode.

En av de absolutt mest klassiske metodene er RK4, se Runge-Kutta-lenken over. Den er konstruert på en liknende måte som Heun. Man lager først en implisitt metode basert på Simpsons integrasjonsregel:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Simpson%27s_rule`
og så approksimerer man de implisitte verdiene i likningen på liknende vis som i Heun.

$\boxed{2}$ Test RK4 på oppgave 14 over. Hva ser du?

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Du kan prøve å vise at

$$\int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4$$

men da skal du nok få svette ganske bra. Du må også lære deg en del ting som kommer i TMA4106.

$\boxed{2}$ Et eksempel på en funksjon som faktisk ikke er integrerbar, er

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Forklar hvorfor.

$\boxed{3}$ Vis at arealet til en ellipse med halvakser a og b er πab.
(Denne går an med penn og papir.)

$\boxed{4}$ Hva med $(1+x^2)^{1/3}$ da, klarer du å antiderivere den?

$\boxed{5}$ Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$$