9 - LINEÆROPERATORER

En ung og lovende person som ønsker å bli klok på fysiske modeller, vil på et eller annet tidspunkt være nødt til å forstå noe som kalles **superposisjonsprinsippet**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle`
Dette prinsippet forteller deg hvordan du skal te deg når du jobber med en lineær modell.

Linæeroperatorer er for superposisjonsprinsippet omtrent som kanel i en kanelbolle, som humle i øl eller som hele pepperkorn i fårikål. Konseptet kanelbolle blir temmelig meningsløst uten kanel, men man tenker kanskje ikke så mye over kanelsmaken når man har spist mange nok kanelboller.

$\boxed{0}$ Kanel smaker faktisk ingenting. Prøv å spise en kanelbolle eller en porsjon risengrynsgrøt mens du holder deg for nesen.

Fikk du til forrige oppgave, har du skjønt omtrent hvordan det er å prøve å forstå superposisjonsprinsippet uten å først forstå hva en lineæroperator er.

Superposisjonsprinsippets mest vesentlige ingrediens

En lineæroperator T er en funksjon som tilfredsstiller

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og alle skalarer a og b.

Å gange en vektor inn i en matrise er en lineæroperator. La oss repetere noen oppgaver som illustrerer poenget. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og beregn:

$\boxed{1}$ $A\mathbf{x}$ $\boxed{2}$ $A\mathbf{y}$ $\boxed{3}$ $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ $\boxed{4}$ $A\mathbf{x}+A\mathbf{y}$ $\boxed{5}$ $A(2\mathbf{x}+3\mathbf{y})$ $\boxed{6}$ $2A\mathbf{x}+3A\mathbf{y}$

Kjært barn har mange navn, og lineæroperator har et par synonymer, **lineærtransform**, **lineærtransformasjon** og **lineæravbildning**. Derivasjonsoperatoren er også lineær. La

$$D(x) = \dot{x} \quad \text{og} \quad y(t) = t^2 \quad \text{og} \quad z(t) = t$$

og beregn

$\boxed{7}$ $D(y)$ $\boxed{8}$ $D(z)$ $\boxed{9}$ $D(y+z)$ $\boxed{10}$ $D(y)+D(z)$ $\boxed{11}$ $D(2y+3z)$ $\boxed{12}$ $2D(y)+3D(z)$

Vi sier at en differensiallikning er lineær dersom operatoren der du "putter inn løsningen" i likningen er lineær. For eksempel er

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

en lineær likning siden

$$D(x) = \ddot{x} + b\dot{x} + cx$$

er en lineæroperator. [1]

$\boxed{13}$ Vis at dersom x og y er løsninger av

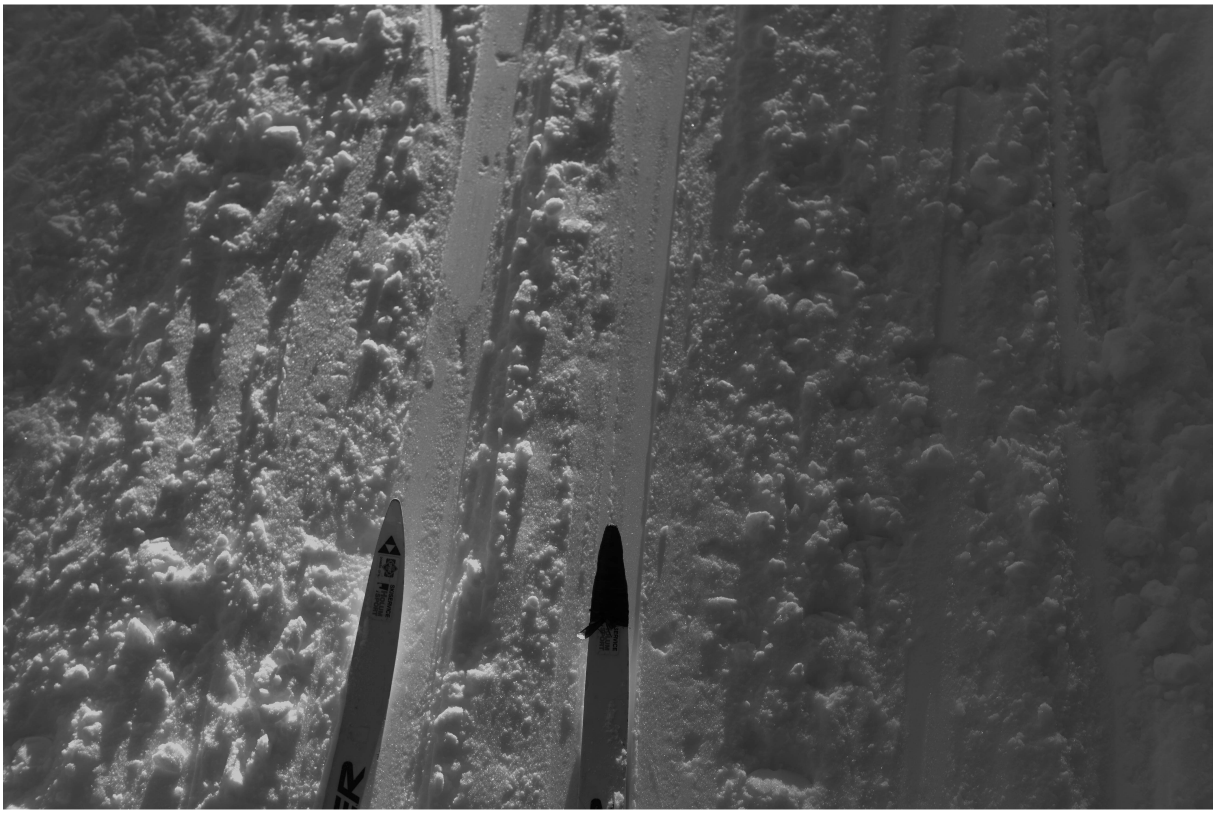
$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

er også $ax + by$ en løsning (a og b er skalarer).

Det bestemte integralet er også en lineæroperator. Finn arealet under grafen til

$\boxed{14}$ $\sin t$ mellom $t = 0$ og $t = \pi$ $\boxed{15}$ $\cos(t/2)$ mellom $t = 0$ og $t = \pi$

$\boxed{16}$ $2\sin t + 3\cos(t/2)$ mellom $t = 0$ og $t = \pi$



[1] Følg med i neste bolk for eksempler på ikkelineære differensialoperatorer.

Nå skal vi se litt på en spesiell type vektorer. Hvis du henger med på følgende, vil du kanskje forstå hvorfor det var naturlig å gjette på eksponensialfunksjonen som løsning til lineære differensiallikningene vi har studert til nå. La igjen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

og beregn

$\boxed{17}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{18}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{19}$ $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{20}$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{21}$ $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

og studer resultatene nøye.

$\boxed{22}$ Hva ser du?

Sjå her:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ikke stort å melde om. Men hva med denne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Noen vektorer har den egenskap at når man ganger dem inn i matrisen, kommer det ut en skalarmultippel av den samme vektoren. Dette ser tilforlatelig ut, men er utrolig viktig, og kalles **egenvektorer**. Den korresponderende skalarmultippelen kalles **egenverdi**, og det er vanlig å bruke den greske bokstaven λ på denne. Vi leter altså etter vektorer slik at

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

I eksemplet over er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

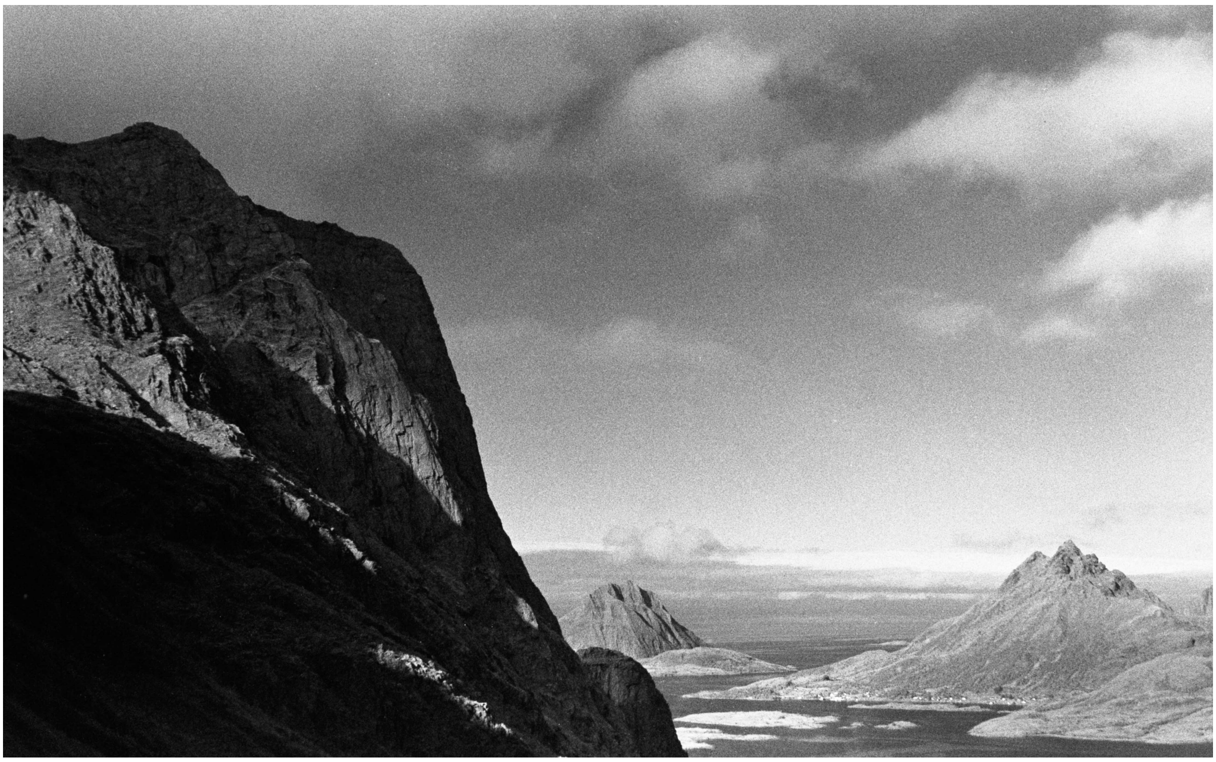
og $\lambda = 9$.

$\boxed{23}$ Nå vet du hva du skulle lete etter i forrige oppgave. Prøv på nytt om du ikke så det isted.

$\boxed{24}$ Er

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

en egenvektor til A?



La oss nå lage en systematisk fremgangsmåte for å finne egenvektorer og egenverdier. Likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

kan vi skrive om til

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og har vi litt trening i enhetsmatrisen, ser vi at vi kan faktorisere dette som

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Nå vet du at dersom kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært uavhengige, har dette problemet entydig løsning, nemlig nullvektoren.

$\boxed{25}$ Hvorfor det?

Nullvektoren vil vi ikke skal klassifisere som egenvektor, for hvis den gjorde det, ville alle tall klassifisert som egenverdier, siden likningen

$$A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$$

er sann uansett hva λ er. Hvis likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

skal ha andre løsninger enn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, må vi kreve at kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært avhengige. Det er de hvis og bare hvis $\det(A - \lambda I) = 0$.

$\boxed{26}$ Prøv å finne egenverdiene til matrisen A på denne måten. Hvor mange egenverdier kan en 3×3-matrise maksimalt ha?

Slik skjer det: Vi beregner

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((6-\lambda)^2-4\right) \\
&-2\left(2(6-\lambda)-4\right) \\
&+2\left(4-2(6-\lambda)-4\right) \\
&= \lambda^3-13\lambda^2+36\lambda \\
&= \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)
\end{aligned}
$$

slik at $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ og $\lambda_3 = 9$ er de tre egenverdiene. Polynomet $p(\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ kalles matrisens **karakteristiske polynom**. Husk nå at algebraens fundamentalteorem sier at et polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i),$$

der der $\lambda_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Det karakteristiske polynomet har alltid orden n. På folkemunne sier vi gjerne at en matrise alltid har "n" egenverdier, men dette fordrer at du teller på riktig måte. Du må telle antall lineære faktorer i det karakteristiske polynomet. [2]

$\boxed{27}$ Finn egenverdiene til

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hint: Å faktorisere et tredjeordens polynom er "trivielt" i den forstand at det finnes en formel: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation#General_cubic_formula`.
Men det er ikke trivielt å huske formelen. Prøv heller numpy:
`https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.eig.html`

> « Ingen mennesker er tjent med å gjøre slavearbeid. Det er ikke interessant, det er slitsomt og betalingen er lav […] Det arbeide som vi kan si ikke er menneskeverdig, det bør automatiseres vekk. »
>
> Jens Balchen i et intervju i *Aftenposten*, 8. januar 1966

[2] Det er ikke nødvendigvis enkelt å finne egenverdiene bare fordi de finnes. Niels Henrik Abel beviste i 1824 at det finnes ingen generell formel for å løse polynomlikninger med høyere orden enn 5:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Abel-Ruffini_theorem`

Når vi har funnet egenverdiene, kan vi finne egenvektorene ved å løse likningen

$$(A - \lambda_k I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

For eksempel er egenvektoren til $\lambda_2 = 4$ gitt ved alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siden

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1-4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6-4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6-4 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

De andre finnes på samme måte.

$\boxed{28}$ Finn egenvektorene til matrisene A og B over. Hvis vil ha fasit, kan du bruke np.linalg.eig.

Alle skalarmultipler (unntatt nullvektoren) av en egenvektor er også egenvektorer. Derfor er det vanlig å definere noe som kalles egenrommet til en egenverdi - dette er alle egenverdiens egenvektorer samt nullvektoren.

Nå er vi frem kommet til rosinen i pølsen, eller kanskje kanelen i kanelbollen. Også andre lineæroperatorer enn matriser kan ha egenvektorer.

$\boxed{29}$ Hva er egenvektor eller egenfunksjon om du vil til derivasjonsoperatoren

$$D(x) = \dot{x} \quad ?$$

(Hint: du kjenner den godt.)

$\boxed{30}$ Skjønner du hvorfor det var lurt å gjette på denne funksjonen når du skulle finne løsninger til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad ?$$

UKENS NØTTER

$\boxed{0}$ Prøv å spise en teskje med kanel.